Wittgenstein's Writings

Ms-117

Ms-117

Ludwig
Wittgenstein

IIr[1]
Philosophische Bemerkungen XIII

1[1] & 11.09.1937

2[1] & “Aber sind die Übergänge also durch die algebraische Formel
3[1] & *nicht* bestimmt?” – In der Frage liegt ein Fehler. Wir verwenden
3[1] & den Ausdruck: “die Übergänge sind durch die Formel …
4[1] & bestimmt”. Wie verwenden wir ihn? Wir können etwa davon
5[1] & reden, daß Menschen durch Erziehung (Abrichtung) dahin
6[1] & gebracht werden, diese Formeln so zu verwenden, daß Alle,
7[1] & wenn sie die gleiche Zahl für x einsetzen, immer die gleiche
8[1] & Zahl für y herausrechnen. Oder wir können sagen: “Diese
9[1] & Menschen sind so erzogen, daß sie alle auf den Befehl ‘ + 3’ auf
10[1] & der gleichen Stufe den gleichen Übergang machen.” Wir
11[1] & könnten dies so ausdrücken: “Der Befehl ‘ + 3’ bestimmt für
12[1] & diese Menschen jeden Übergang von einer Zahl zur nächsten
13[1] & völlig.” (Im Gegensatz zu andern Menschen, die auf diesen
14[1] & Befehl nicht wissen, was sie zu tun haben, oder deren jeder
15[1] & zwar mit Sicherheit, aber in anderer Weise, auf ihn reagiert.)
16[1] & Wir können anderseits verschiedene Arten von Formeln & zu
17[1] & ihnen gehörige verschiedene Arten der Verwendung
18[1] & (verschiedene Arten der Abrichtung) einander entgegensetzen.
19[1] & Wir *nennen* dann Formeln einer bestimmten Art (& der
20[1] dazugehörigen Verwendungsweise) “Formeln, welche eine
Zahl y für ein gegebenes x bestimmen” & Formeln anderer Art
solche, “die die Zahl y für ein gegebenes x nicht bestimmen”.
($y = x^2 + 1$ wäre etwa von der ersten Art, $y > x^2 + 1$, $y = x^2 \pm 1$,

$y = x^2 + z$ von der andern.) Der Satz "Die Formel ... bestimmt eine Zahl y" ist dann eine Aussage über die Form der Formel. Und es ist nun zu unterscheiden ein Satz wie "Die Formel, die ich hingeschrieben habe, bestimmt y" oder "Hier steht eine Formel, die y bestimmt", von einem Satz wie: "die Formel $y = x^2$ bestimmt die Zahl y für ein gegebenes x". Die Frage: "Steht dort eine Formel, die y bestimmt?" heißt dann dasselbe wie: "steht dort eine Formel dieser Art, oder jener Art?", was wir aber mit der Frage anfangen sollen: "Ist $y = x^2$ eine Formel die y für ein gegebenes x bestimmt?" ist nicht ohne weiteres klar. Diese Frage könnte man etwa an einen Schüler stellen, um zu prüfen, ob er die Verwendung des Ausdrucks "bestimmen" versteht; oder es könnte eine mathematische Aufgabe sein, zu finden, ob auf der rechten Seite der Formel nur eine Variable steht, wie z.B. im Fall $y = (x^2 + z)^2 - z(2x^2 + z)$. Man kann nun sagen: "Wie die Formel gemeint wird, das bestimmt, welche Übergänge zu machen sind." Was ist das Kriterium dafür, wie die Formel gemeint ist? Doch wohl die Art & Weise, wie wir sie ständig gebrauchen, wie uns gelehrt wurde, sie zu gebrauchen. Wir sagen z.B. Einem, der ein uns unbekanntes Zeichen gebraucht: "Wenn Du mit "$x{\sim}2$" meinst: x^2, so erhältst Du *diesen* Wert für y, wenn Du damit $\sqrt{x}$ meinst, *jenen*." – Frag' Dich nun: Wie macht man es, mit "$x{\sim}2$" das eine, oder das andere, *meinen*? *So* kann also das Meinen die Übergänge zum Voraus bestimmen. "Worin liegt dann aber die eigentümliche Unerbittlichkeit der Mathematik?" – Ist für sie nicht ein gutes Beispiel die Unerbittlichkeit, mit der auf 1 2 folgt, auf 2 3, auf 3 4, u.s.w.? – Das heißt doch wohl: in der *Kardinalzahlenreihe* folgt, – denn in einer andern Reihe folgt ja etwas anderes? Und ist denn *diese* Reihe nicht eben durch diese Folge *definiert*? – “Willst Du also sagen, daß es gleich richtig ist *wie* man zählt & daß jeder zählen kann, wie er will?” – Wir würden es wohl nicht “zählen” nennen, wenn Jeder *irgendwie* Ziffern nacheinander ausspricht; aber es ist freilich nicht einfach eine Frage der Benennung. Denn das, was wir “zählen” nennen, ist ja ein wichtiger Teil der Praxis unseres Lebens. Das Zählen, & Rechnen, ist ja, z.B., nicht einfach ein Zeitvertreib. Zählen (& das heißt: *so* zählen) ist eine Technik, die täglich in den mannigfaltigsten Verrichtungen unseres Lebens verwendet wird. Und darum lernen wir zählen, so, wie wir es lernen: mit endlosem Üben, mit erbarmungsloser Genauigkeit, darum wird unerbittlich darauf gedrungen, daß wir Alle auf “eins” “zwei”, auf “zwei” “drei”, sagen, u.s.f..– “Aber ist dieses Zählen also nur ein *Gebrauch*; entspricht dieser Folge nicht auch eine Wahrheit?” Die *Wahrheit* ist, daß das Zählen sich sehr gut bewährt hat. – “Willst Du also sagen, daß “wahr-sein” heißt: brauchbar (oder nützlich) sein?” – Nein; sondern, daß man von der natürlichen Zahlenreihe – ebenso wie von unserer Sprache – nicht sagen kann, sie sei wahr, sondern: sie sei brauchbar &, vor allem, *sie werde verwendet.* “Aber folgt es nicht mit logischer Notwendigkeit, daß Du 2 erhältst, wenn Du zu 1 1 zählst & 3, wenn Du zu 2 1 zählst, u.s.f.; & ist diese Unerbittlichkeit nicht dieselbe, wie die des logischen Schlusses?” – Doch! Sie ist dieselbe. – “Aber entspricht denn der logische Schluß nicht einer Wahrheit? Ist es nicht *wahr*, daß das aus diesem folgt?” – Der Satz: ‘es ist wahr, daß das aus diesem folgt’, heißt einfach: das folgt aus diesem. Und wie verwenden wir diesen Satz? – Was würde denn geschehen, wenn wir anders schlössen – wie würden wir mit der Wahrheit in Konflikt geraten? Da muß man sich klar machen, worin Schließen denn eigentlich besteht. Man wird etwa sagen, es besteht im Übergang von einer Behauptung zu einer weiteren. Aber was heißt das? Heißt es, daß Schließen etwas ist, was stattfindet beim Übergang von der einen zur andern Behauptung, also *ehe* die andere ausgesprochen ist – oder heißt es, daß schließen darin besteht die eine Behauptung auf die andere folgen zu lassen, d.h., nach ihr auszusprechen? Wir stellen uns, verleitet durch die besondere Verwendung des Verbums "schließen", gern vor, das Schließen sei eine eigentümliche Tätigkeit, ein Vorgang im Medium des Verstandes, gleichsam ein Brauen der Nebel, aus welchem dann der Schluß auftaucht. Sehen wir aber doch zu, was dabei geschieht! Einerseits gibt es da einen Übergang von einem Satz zum andern auf dem Weg über andere Sätze also durch eine Schlußkette, aber von diesem Übergang brauchen wir nicht zu reden, da er ja eine andere Art von Übergang voraussetzt, nämlich von einem Glied der Kette zum nächsten. Und auch hier gibt es einen Vorgang, den man Übergang *zwischen* Gliedern nennen kann. An diesem Vorgang ist nun nichts okkultes; es ist ein Ableiten des einen Satzzeichens aus dem andern nach einer Regel, ein Vergleichen der beiden mit irgend einem Paradigma das uns das Schema des Übergangs darstellt, oder dergleichen. Es kann auf dem Papier, mündlich, oder 'im Kopf' d.h. in der Vorstellung vor sich gehen. Der Schluß kann aber auch so gezogen werden, daß der eine Satz ohne einen Vorgang der Überleitung nach dem andern ausgesprochen wird; oder die Überleitung besteht nur darin, daß wir sagen:

“Also:”, oder “Daraus folgt:” oder dergl.. Man nennt es dann “schließen”, wenn der gefolgerte Satz sich tatsächlich aus der Prämisse ableiten *läßt*. Was heißt es nun, daß sich ein Satz aus einem andern, vermittels einer Regel, ableiten *läßt*? Läßt sich nicht alles aus allem vermittels *irgend* einer Regel ableiten? – Was heißt es, wenn ich z.B. sage: diese Zahl läßt sich durch die Multiplikation jener beiden erhalten? Dies ist offenbar eine Regel, die sagt, daß Du diese Zahl erhalten mußt wenn anders Du *richtig* multiplizierst; & diese Regel können wir dadurch erhalten, daß wir die beiden Zahlen multiplizieren, oder auch auf andere Weise (obwohl man auch jeden Vorgang, der zu diesem Ergebnis führt, eine ‘Multiplikation’ nennen kann). Man sagt nun ich habe multipliziert wenn ich die Multiplikation 165 × 363 ausgeführt habe, aber auch, wenn ich sage: “4 mal 2 ist 8”, obwohl hier kein Rechnungsvorgang zum Produkt geführt hat (das ich aber auch hätte *ausrechnen* können). Und so sagen wir auch es werde ein Schluß gezogen wo er nicht errechnet wird. Aber die Schlußregel muß doch so sein, daß die Folgerung wahr sein *muß*, wenn die Prämisse wahr ist. Wenn ich also die Prämisse als wahr erkannt habe, so muß der Schluß ein solcher sein, daß ein Nicht-Übereinstimmen der Folgerung mit der Realität ausgeschlossen ist. – Und das ist nur dadurch möglich daß ich nichts als ein solches Nicht-Übereinstimmen gelten lasse, wenn die Realität mit den Prämissen übereinstimmt. “Ich darf aber doch nur folgern, was wirklich *folgt*!” – Soll das heißen: nur das, was den Schlußregeln gemäß folgt, – oder soll es heißen: nur das, was nach solchen Schlußregeln folgt, die mit irgend einer Realität übereinstimmen? Hier schwebt uns in vager Weise vor, daß diese Realität etwas sehr Abstraktes, sehr Allgemeines & sehr Hartes ist. Die Logik ist eine Art von Ultraphysik, die Beschreibung des 'logischen Bau's' der Welt, den wir durch eine Art Ultraerfahrung wahrnehmen (mit dem Verstande, etwa). Es schweben uns hier vielleicht Schlüsse vor wie dieser: "Der Ofen raucht, also ist das Ofenrohr wieder verlegt." (Und *so* wird dieser Schluß gezogen! Nicht so: "Der Ofen raucht & wenn immer der Ofen raucht, ist das Rohr verlegt; also ...".) Das, was wir 'logischer Schluß' nennen ist nichts als eine Transformation des Ausdrucks. Die Umrechnung von einem Maß auf ein anderes. Auf der einen Kante eines Maßstabes sind Zoll aufgetragen, auf der andern *cm*.. Ich messe den Tisch in Zoll & gehe dann *auf dem Maßstab* zu cm über. – Oder so: ich fülle ein Gefäß mit Wasser, dann leere ich das Wasser in ein Standglas (über) & endlich wäge ich dieses Wasser, um einen andern Ausdruck für den Inhalt des Gefäßes zu erhalten. Und freilich gibt es auch beim Übergang von einem Maß zum andern richtig & falsch; aber mit welcher Realität stimmt hier das Richtige überein? Wohl mit einer *Abmachung*, oder einem *Gebrauch*, & etwa mit den praktischen Bedürfnissen. Wie würden wir mit der Wahrheit in Konflikt geraten, wenn unsere Zollstäbe aus weichem Gummi wären, statt aus Holz & Stahl? "Nun, wir würden nicht das richtige Maß des Tisches kennenlernen." – Du meinst wir würden nicht, oder nicht zuverlässig, *das* Maß erhalten, die wir mit unsern harten Maßstäben erhalten. *Der* wäre also im Unrecht, der den Tisch mit diesem weichen Maßstab mißt & behauptet, er mäße nun 1 m 80 nach unsrer gewöhnlichen Meßart; sagt er aber bloß, der Tisch mißt 1 m 80 nach seiner Meßart, so stimmt das. – "Aber das ist dann doch überhaupt kein Messen!" – Gewiß, es ist nicht was wir 'messen' nennen; kann aber unter Umständen auch 'praktische Zwecke' erfüllen. Einen Maßstab, der sich bei der Erwärmung außerordentlich stark ausdehnte, würden wir – unter gewöhnlichen Umständen – deshalb *unbrauchbar* nennen. Wir könnten uns aber Verhältnisse denken, in denen gerade dies das Erwünschte wäre. Ich stelle mir vor, daß wir die Ausdehnung mit freiem Auge wahrnehmen; & Körpern in Räumen von verschiedener Temperatur die gleiche Maßzahl der Länge beilegen wenn sie auf dem Maßstab der für's Auge bald länger, bald kürzer ist, gleich weit reichen. Man kann dann sagen: Was hier "messen" & "Länge" & "längengleich" heißt ist etwas Anderes, als was wir so nennen. Der Gebrauch dieser Wörter ist hier ein anderer als der unsere; aber er ist mit ihm *verwandt* & auch wir gebrauchen diese Wörter auf *vielerlei* Weise. Plinius sagte, es sei eine Eigenschaft der Zahlen, daß nach je zehn eine höhere Art beginne. (Die logische Struktur der Welt. –) "Aber muß denn nicht aus '(x).fx' fa folgen, *wenn* (ξ) • Φξ so gemeint ist, wie wir es meinen?" – Und wie äußert es sich: *wie* wir es meinen? Nicht durch die ständige Praxis seines Gebrauchs? & etwa noch durch gewisse *Gesten* – & was dem ähnlich ist. — Es ist aber als hinge dem Wort "alle", wenn *wir* es sagen, noch etwas an, womit ein anderer Gebrauch unvereinbar wäre; nämlich, die *Bedeutung*. "'Alle' heißt doch: *alle*!" möchten wir sagen, wenn wir es erklären sollen; & dabei machen wir eine gewisse Geste & Miene. Hacke alle diese Bäume um! − − Ja, verstehst Du nicht was '*alle*' heißt? (Er hatte *einen* stehen gelassen.) Wie hat er gelernt, was 'alle' heißt? Doch wohl durch Übung. – Und freilich diese Übung hat nun nicht bewirkt, daß er auf den Befehl *das tut*, sondern sie hat das Wort mit einer Menge von Bildern (visuellen & andern) umgeben, von denen das eine oder das andere auftaucht, wenn wir das Wort hören & aussprechen. (Und wenn wir Rechenschaft darüber geben sollen, was die 'Bedeutung' des Wortes ist, greifen wir zuerst *ein* Bild aus dieser Masse heraus – & verwerfen es dann wieder als unwesentlich, wenn wir sehen, daß einmal dies, einmal jenes auftritt, & manchmal keines.) Man könnte sagen: Man lernt die Bedeutung von "alle", indem man lernt, daß aus (x).fx fa folgt. – D.h., die Übungen die den Gebrauch dieses Wortes einüben, lehren, gehen immer darauf hinaus, daß keine Ausnahme gemacht werden darf. "Aus 'alle', wenn es *so* gemeint ist muß doch *das* folgen." – Wenn es *wie* gemeint ist? Überlege es Dir, wie meinst Du es? Da schwebt Dir etwa noch ein Bild vor – & mehr hast Du nicht. – Nein, es *muß* nicht, – aber es *folgt*: Wir *vollziehen* diesen Übergang. Und wir sagen: Wenn es nicht folgt, dann waren es eben nicht *alle*! – – und das zeigt nur, wie wir mit Worten in so einer Situation reagieren. – Wir könnten es auch so sagen: Es kommt uns vor, daß, wenn aus (x). fx nicht mehr fa folgen soll, außer dem *Gebrauch* des Wortes "alle" noch etwas anderes sich geändert hat, etwas, was dem Worte unmittelbar anhängt. Ist das nicht ähnlich, wie wenn man sagt: "Wenn dieser Mensch anders handelte, da müßte auch sein Charakter ein andrer sein." Nun das kann in manchen Fällen etwas heißen & in manchen nicht. Wir sagen: "aus dem Charakter fließt die Handlungsweise" & so fließt aus der Bedeutung der Gebrauch. Das zeigt Dir – könnte man sagen – wie fest verbunden gewisse Gesten, Bilder, Reaktionen mit einem ständig geübten Gebrauch sind. 'Es drängt sich uns das Bild auf ...' Es ist sehr interessant, daß sich uns Bilder *aufdrängen* können. Wichtig ist, daß in unserer Sprache – in unserer natürlichen Sprache – 'alle' ein Grundbegriff ist & 'alle außer einem' weniger fundamental; d.h., es gibt dafür nicht *ein* Wort auch nicht eine charakteristische Geste. Der ganze *Witz* des Wortes "alle" ist ja, daß es keine Ausnahme zuläßt. – Ja, das ist der Witz seiner Verwendung in unserer Sprache; aber welche Verwendungsarten wir als 'Witz' empfinden, das hängt damit zusammen, welche Rolle diese Verwendung in unserm ganzen Leben spielt. (Damit hängt diese Bemerkung zusammen: Wir möchten manchmal sagen: "Es muß doch einen Grund haben, warum auf dieses Thema – in einer Symphonie etwa – gerade *das* Thema folgt." Als Grund würden wir eine gewisse Beziehung der beiden Themen, eine Verwandtschaft, einen Gegensatz oder dergleichen, anerkennen. – Aber wir können ja eine solche Beziehung konstruieren: sozusagen eine Operation, die das eine aus dem andern erzeugt; aber damit ist uns nur gedient, wenn diese Beziehung eine uns wohl bekannte ist. Es ist also als müßte die Folge dieser Themen einem in uns schon vorhandenen Paradigma entsprechen. Von einem Gemälde, das zwei menschliche Figuren zeigt, könnte man ähnlich sagen: "Es muß einen Grund haben, warum gerade *diese* zwei Gesichter uns einen solchen Eindruck machen." Wir möchten – heißt das – diesen Eindruck der beiden Gesichter wo anders wiederfinden– in einem andern Gebiet. – Aber ob er wiederzufinden ist? Man könnte auch fragen: Welche Zusammenstellung von Themen hat eine *Pointe*, welche *keine*? Oder: *Warum* hat diese Zusammenstellung eine Pointe & *die* keine? Das mag nicht leicht zu sagen sein! Oft können wir sagen: “Diese entspricht einer Geste, diese nicht.”) Diese Unklarheit zeigt sich sehr deutlich in Russell’s Darstellung (‘Principia Mathematica’ ...) Daß ein Satz $\vdash$ q aus einem Satz $\vdash$ p $\supset$ q • p folgt, ist hier ein logisches Grundgesetz:

$\vdash$ p $\supset$ q • p .$\supset$. $\vdash$ q.

Dieses berechtige uns nun, heißt es, $\vdash$ q aus $\vdash$ p $\supset$ q • p zu schließen. Aber worin besteht denn ‘schließen’, diese Tätigkeit, zu der wir berechtigt werden? Doch darin, den einen Satz – in irgend einem Sprachspiel – nach dem andern als Behauptung auszusprechen, anzuschreiben & dergl., & wie kann mich jenes Grundgesetz *dazu* berechtigen? Russell will doch sagen: “*So* werde ich schließen & so ist es *richtig*.” Er will uns also einmal mitteilen, wie er schließen will: das geschieht durch eine *Regel* des Schließens. Wie lautet sie? Daß dieser Satz jenen impliziert? Doch wohl, daß in den Beweisen dieses Buchs ein solcher Satz nach einem solchen geschrieben wird. – : es soll ja ein logisches Grundgesetz sein, daß es *richtig* ist, so zu schließen! – Dann müßte das Grundgesetz lauten: “Es ist richtig von ... auf ... zu schließen”; und dieses Grundgesetz sollte nun wohl einleuchten; aber dann wird uns eben die Regel selbst als richtig, oder berechtigt, einleuchten. “Aber diese Regel handelt doch von Sätzen in einem Buch, & das gehört doch nicht in die Logik!” – Ganz richtig; die Regel ist wirklich nur eine Mitteilung, daß in diesem Buche nur *dieser* Übergang von einem Satz zum nächsten gebraucht wird, denn die Richtigkeit des Übergangs muß (eben) an Ort & Stelle einleuchten; & der Ausdruck des ‘logischen Grundgesetzes’ ist dann die *Folge der*

Sätze selbst. Russell scheint mit jenem Grundgesetz von einem Satz $\vdash$ q zu sagen: “Er folgt schon – ich brauche ihn nur noch zu folgern.” Ganz analog heißt es einmal bei Frege, die Gerade, welche je zwei Punkte verbindet, sei eigentlich schon da, ehe wir sie zögen. Und so ist es auch, wenn wir sagen, die Übergänge der Reihe + 2 etwa wären eigentlich bereits gemacht, ehe wir sie mündlich oder schriftlich machen, – gleichsam nachzögen. Einem, der dies sagt, könnte man antworten: Du verwendest hier ein Bild: Man *kann* die Übergänge, die Einer in einer Reihe machen soll, dadurch *bestimmen*, daß man sie ihm vormacht. Indem man z.B. die Reihe, die er schreiben soll, in einer anderen Notation vorschreibt daß er sie nur noch zu übertragen hat, oder indem man sie wirklich ganz dünn vorschreibt & er hat sie nachzuziehen. Im ersten Fall können wir auch sagen, wir schreiben nicht *die* Reihe an, die er zu schreiben hat, machen also die Übergänge dieser Reihe selbst nicht; im zweiten Falle aber werden wir gewiß sagen, die Reihe, die er schreiben soll, sei schon vorhanden. Wir würden dies auch sagen wenn wir ihm, was er hinzuschreiben hat, *diktieren*, obwohl wir dann eine Reihe von Lauten hervorbringen & er eine Reihe von Schriftzeichen. Es ist jedenfalls eine sichere Art die Übergänge, die Einer zu machen hat, zu *bestimmen*, sie ihm, in irgend einem Sinne, schon vorzumachen. – Wenn wir daher diese Übergänge in einer ganz andern Weise bestimmen, indem wir nämlich unsern Schüler einer Abrichtung unterziehen, wie z.B. unsere Kinder sie im Einmaleins & im Multiplizieren erhalten, so nämlich, daß Alle, die so abgerichtet sind, nun beliebige Multiplikationen, die sie nicht in ihrer Lehrzeit gemacht haben, auf die gleiche Weise & mit übereinstimmenden Resultaten ausführen – wenn also die Übergänge, die Einer auf den Befehl + 2 zu machen hat durch Abrichtung so bestimmt sind, daß wir mit Sicherheit voraussagen können, wie er gehen wird, auch wenn er *diesen* Übergang bis jetzt noch nie gemacht hat, – dann kann es uns natürlich sein, als Bild dieses Sachverhalts den zu gebrauchen, die Übergänge seien bereits alle gemacht, wir schrieben sie nur noch hin. "*Wie weiß ich*, daß ich im Verfolg der Reihe + 2 schreiben muß

200004, 200006

und nicht 200004, 200008?" – Die Frage ist ähnlich der: wie weiß ich, daß diese Farbe 'rot' ist? "Aber Du weißt doch, daß Du immer die *gleiche* Zahlenfolge in den Einern schreiben mußt: 2, 4, 6, 8, 0, 2, 4, u.s.w." – Ganz richtig! das Problem muß auch schon in dieser Zahlenfolge, ja auch schon in *der*

2, 2, 2, 2 u.s.w. ad inf.

auftreten. – Denn wie weiß ich, daß ich nach der 500sten2"2" schreiben soll? daß nämlich dann "2" 'die gleiche Zahl' ist!? Ja, weiß ich es denn? Und wenn ich es *zuvor* weiß, was hilft mir dieses Wissen für später? Ich meine: wie weiß ich dann, wenn der Schritt wirklich zu machen ist, was ich mit diesem Wissen anzufangen habe? Wenn zur Fortsetzung der Reihe + 1 eine Intuition nötig ist, dann auch zur Fortsetzung der Reihe + 0.

20[2] & 21[1] Auf die Frage, worin denn Schließen besteht, hören wir etwa: "Wenn ich die Wahrheit der Sätze … erkannt habe, so bin ich nun berechtigt … hinzuschreiben." – Inwiefern berechtigt? Hatte ich früher kein Recht, es hinzuschreiben? – – "Jene Sätze überzeugen mich von der Wahrheit dieses Satzes." – Aber darum handelt sich's natürlich auch nicht. − − "Nach diesen Gesetzen vollzieht der Geist die Übergänge die man "logischer Schluß" nennt." – Das ist gewiß interessant & wichtig; aber ist es denn auch wahr? schließt er immer nach *diesen* Gesetzen? und worin besteht die besondere Tätigkeit (des Schließens)? – Darum ist es notwendig, zu schauen, wie wir denn in der Praxis der Sprache Schlüsse vollziehen – was denn das Schließen im Sprachspiel für eine Tätigkeit ist. Was nennen wir, z.B., 'Schlüsse' bei Russell, oder bei Euklid? Soll ich sagen: die Übergänge von einem Satz zum nächsten im Beweis? Aber wo steht der *Übergang*? – Ich sage, bei Russell folge dieser Satz (p) aus jenem (q), wenn p aus q gemäß der Stellung der beiden in einem 'Beweise', & den ihnen beigefügten Zeichen, abzuleiten ist, wenn wir das Buch lesen. Denn, dieses Buch zu lesen ist ein Spiel, welches gelernt sein will.

21[2] Z.B.: In einer Vorschrift steht: "Alle, die über 1 m 80 hoch sind, sind in die … Abteilung aufzunehmen." Ein Kanzlist verliest die Namen der Leute, dazu ihre Höhe. Ein andrer teilt sie den & den Abteilungen zu. – "N.N., 1·90 m." – "Also N.N. in die … Abteilung." Das ist Schließen.

21[3] & Man ist sich so oft im Unklaren, worin das Folgen & Folgern
22[1] & eigentlich besteht; was für ein Sachverhalt oder Prozeß es ist.
23[1] & Und dies kommt von der eigentümlichen Verwendung dieser
24[1] Verben. Es wird uns nahe gelegt, daß Folgen das Bestehen einer Verbindung zwischen Sätzen ist, der wir beim Folgern nachgehen. (Wie man etwa einer elektrischen Leitung nachgeht.) Wird es nun experimentell festgestellt, ob sich ein Satz aus dem andern ableiten läßt? – Es scheint, ja! Denn ich schreibe gewisse Zeichenfolgen hin, richte mich dabei nach gewissen Paradigmen – dabei ist es allerdings wesentlich, daß ich kein Zeichen übersehe, oder daß es sonst wie abhanden kommt – & was bei diesem Vorgang herauskommt, davon sage ich, es folge. – Dagegen ist ein Argument dies: Wenn 2 und 2 Äpfel nur 3 Äpfel geben, d.h., wenn 3 Äpfel da liegen, nachdem ich 2 & wieder 2 hingelegt habe, sage ich nun nicht: "2 + 2 ist also doch nicht immer 4"; sondern: "Einer muß irgendwie weggekommen sein". Aber in wiefern mache ich ein Experiment, wenn ich dem schon hingeschriebenen Beweis nur *folge*? Man könnte sagen: "Wenn Du diese Kette von Umformungen ansiehst, – *kommt es Dir nicht auch so vor, als stimmten sie* mit den Paradigmen?" Wenn das also ein Experiment genannt werden soll, dann wohl ein psychologisches. – Der Anschein des Stimmens kann ja auf einer Sinnestäuschung beruhen. Und so ist es ja auch manchmal, wenn wir uns verrechnen. Man sagt auch: "Das kommt mir heraus." Und es ist doch wohl ein Experiment, das zeigt, daß dies *mir* herauskommt. Man könnte sagen: Das Resultat des Experiments ist dies, daß ich am Ende, beim Resultat des Beweises angelangt, mit Überzeugung sage: "Ja, es

stimmt.” Was ist die charakteristische Verwendung des Vorgangs der Ableitung als *Rechnung* – im Gegensatz zur Verwendung des Vorgangs als Experiment? Wir betrachten die Berechnung als Demonstration einer *internen Eigenschaft* (einer Eigenschaft des *Wesens*) der Strukturen. Aber was heißt das? Als Urbild der ‘internen Eigenschaft’ könnte dieses dienen:

$10 = 3 \times 3 + 1$

24[2] & 25[1] Wenn ich nun sage: 10 Striche bestehen notwendig aus 3 mal 3 Strichen & einem Strich – das heißt doch nicht: wenn zehn Striche dastehen, so stehen immer die Ziffern & Bogen rundherum! – Setze ich sie aber zu den Strichen hinzu, so sage ich, ich demonstrierte nur das Wesen jener Gruppe von Strichen. – Aber bist Du sicher, daß sich die Gruppe beim Dazuschreiben jener Zeichen nicht geändert hat? – "Ich weiß nicht; aber *eine* bestimmte Zahl von Strichen stand da; & wenn nicht 10 so eine andre & dann hatte die eben andre Eigenschaften. –" Man sagt: die Rechnung 'entfaltet' die Eigenschaft der Hundert. Was heißt es eigentlich: 100 bestehe aus 50 + 50? Man sagt: der Inhalt der Kiste besteht aus 50 Äpfeln & 50 Birnen. Aber wenn Einer sagte: "der Inhalt der Kiste besteht aus 50 Äpfeln & 50 Äpfeln" –, wir wüßten zunächst nicht, was er meint. – Wenn man sagt: "Der Inhalt der Kiste besteht aus 2 mal 50 Äpfeln", so heißt das entweder, es seien da zwei Abteilungen zu 50 Äpfeln; oder es handelt sich etwa um eine Verteilung, in der Jeder 50 Äpfel erhalten soll & ich höre nun, daß man aus dieser Kiste 2 Personen beteilen kann. "Die 100 Äpfel in der Kiste bestehen aus 50 und 50" – hier ist wichtig der unzeitliche Charakter von 'bestehen'. Denn es heißt nicht, sie bestünden *jetzt*, oder für einige Zeit aus 50 und 50.

25[2] Was ist denn das Charakteristikum der ‘internen Eigenschaften’? Daß sie immer, unveränderlich in dem Ganzen bestehen, das sie ausmachen; gleichsam unabhängig von allen äußeren Geschehnissen. Wie die Konstruktion einer Maschine auf dem Papier nicht bricht, wenn die Maschine selbst äußern Kräften erliegt. – Oder ich möchte sagen: Daß sie nicht Wind & Wetter unterworfen sind, wie das Physikalische der Dinge; sondern unangreifbar wie Schemen.

25[3] & 26[1] Statt, “100 bestehen aus 50 und 50”, könnte man sagen: “ich lasse 100 aus 50 und 50 bestehen”.

26[2] “Aber bin ich also in einer Schlußkette nicht gezwungen zu gehen, wie ich gehe?” – Gezwungen? Ich kann doch wohl gehen, wie ich will! – “Aber wenn Du im Einklang mit den Regeln bleiben willst, *mußt* Du so gehen.” – Durchaus nicht; ich nenne etwas anderes ‘Einklang’. – “Ja, aber dann veränderst Du eben den Sinn des Wortes ‘Einklang’, oder den Sinn der Regel.” – Nein, – wer sagt, was hier ‘verändern’ & was ‘gleichbleiben’ heißt? Wieviele Regeln immer Du mir angibst, ich gebe Dir eine Regel, die *meine* Verwendung Deiner Regeln rechtfertigt.

26[3] “Du darfst doch das Gesetz jetzt nicht auf einmal anders anwenden!” – Wenn ich darauf antworte: “Ach ja, ich hatte es ja *so* angewandt!” oder: “Ach, *so* sollte ich es anwenden –!”, dann spiele ich mit. Antworte ich aber einfach: “Anders? – Das *ist* doch nicht anders!” – was willst Du tun?

27[1] Inwiefern ist ein Argument ein Zwang? – “Du gibst doch *das* zu, – & *das* zu; dann mußt Du auch *das* zugeben!” Das ist die Art jemanden zu zwingen. D.h., man kann so, tatsächlich, Menschen zwingen, etwas zuzugeben. – Nicht anders, als wie man Einen etwa dazu zwingen kann, dorthin zu gehen, indem man gebietend mit dem Finger dorthin zeigt. Denke, ich zeige in diesem Fall mit zwei Fingern zugleich in zwei verschiedenen Richtungen & stelle es damit dem Andern frei, in welcher der beiden er gehen will– ein andermal (aber) zeige ich nur in *einer* Richtung; so kann man das auch so ausdrücken: mein erster Befehl habe ihn nicht gezwungen in *einer* Richtung zu gehen, wohl aber der zweite. Das ist aber eine Aussage, die angeben soll welcher Art meine Befehle waren; aber nicht in welcher Art sie wirken, ob sie den & den tatsächlich zwingen, d.h., ob er ihnen gehorcht.

27[2] & 28[1] Ist eine Berechnung ein Experiment? – Ist es ein Experiment, wenn ich morgens aus dem Bett steige? Aber könnte dies nicht ein Experiment sein, – welches zeigen soll, ob ich nach so & so viel Stunden Schlafes die Kraft habe mich zu erheben? Und was fehlt dieser Handlung dazu, dies Experiment zu sein? – Bloß, daß sie nicht zu diesem Zwecke, d.h., in der Verbindung mit einer solchen Untersuchung ausgeführt wird. *Experiment* ist etwas durch den Gebrauch, der davon gemacht wird.

28[2] Wäre es möglich, daß Leute heute eine unsrer Berechnungen durchgingen & von den Schlüssen befriedigt wären, morgen aber ganz andre Schlüsse ziehen wollen, einen andern Tag wieder andere? Ja, kann man sich nicht denken, daß dies mit einer *Gesetzmäßigkeit* so geschähe; daß, wenn er einmal *diesen* Übergang macht, er ‘*eben darum*’ das nächste Mal einen andern macht, & darum (z.B.) das nächste Mal wieder den ersten? (Ähnlich, wie wenn in einer Sprache die Farbe, die einmal “rot” genannt wird, darum beim nächsten Male anders genannt würde & beim übernächsten wieder “rot”, u.s.f., dies könnte Menschen so natürlich sein. Man könnte es ein Bedürfnis nach Abwechslung nennen.)

29[1] Ist es nicht so: Solange man denkt, es kann nicht anders sein, zieht man logische Schlüsse. Das heißt wohl: solange *das & das – gar nicht in Frage gezogen wird*. Die Schritte, welche man nicht in Frage zieht, sind logische Schlüsse. Aber man zieht sie nicht darum *nicht* in Frage, weil sie ‘sicher der Wahrheit entsprechen’ – oder dergl. – sondern, dies ist eben was man ‘Denken’, ‘Sprechen’, ‘Schließen’, ‘Argumentieren’, nennt. Es handelt sich hier gar nicht um irgend eine Entsprechung des Gesagten mit der Realität; vielmehr ist die Logik *vor* einer solchen Entsprechung; nämlich in dem Sinne, in welchem die Festlegung der Meßmethode *vor* der Richtigkeit oder Falschheit einer Längenangabe.

29[2] “Wenn wir nicht in Gewissem übereinstimmen, können wir nicht argumentieren.” – Vielmehr: ohne diese Übereinstimmung *nennen* wir es wohl nicht ‘argumentieren’.

29[3] & “Nach Dir könnte also jeder die Reihe fortsetzen, wie er will; &
30[1] & also auch auf *irgend* eine Weise schließen!” Wir werden es dann
31[1] & nicht “die Reihe fortsetzen” nennen & auch wohl nicht
32[1] “schließen”. Denn, daß ihn Schlußgesetze nicht zwingen, das & das zu reden, oder zu schreiben, darüber sind wir ja einig. Und wenn Du sagst, er könne es zwar *reden*, aber er kann es nicht *denken*, so sage ich nur, das heiße nicht: er könne es, quasi trotz aller Anstrengung, nicht denken, sondern es heißt: zum ‘Denken’ gehört für uns wesentlich, daß er – beim Reden, Schreiben, etc. – *solche* Übergänge macht. Und ferner sage ich, daß die Grenze zwischen dem, was wir noch ‘denken’ & dem, was wir nicht mehr so nennen so wenig scharf gezogen ist, wie die Grenze zwischen dem, was noch “Gesetzesmäßigkeit” genannt wird & dem was wir nicht mehr so nennen. Nun muß ich dies aber qualifizieren: Denn man kann ja doch sagen, daß die Schlußgesetze uns zwingen; in dem Sinne nämlich, wie andere Gesetze in der menschlichen Gesellschaft. Der Kanzlist, der so schließt, wie in ( ), *muß* es so tun, er wäre bestraft worden, wenn er anders schlösse. Wer anders schließt kommt allerdings in Konflikt: z.B. mit der Gesellschaft; aber auch (noch) mit andern praktischen Folgen.

Und auch *daran* ist mehr, als ich oben sagte, wenn man sagt: “Er kann es nicht *denken*.” Man will etwa sagen: Er kann es nicht mit persönlichem Inhalt erfüllen: er kann nicht wirklich *mitgehen*, mit seinem Verstand, mit seiner Person. Es ist ähnlich, wie man sagt: Diese Tonfolgen geben keinen Sinn, ich kann sie nicht mit Ausdruck singen. Ich kann nicht *mitschwingen*. Oder, was hier auf dasselbe hinauskommt: ich schwinge nicht mit. “Wenn er es redet – könnte man sagen – kann er es nur gedankenlos reden.” Und hierzu muß nur bemerkt werden, daß das ‘gedankenlose’ Reden sich von einem andern wohl auch manchmal durch das unterscheidet, was beim Reden im Redenden an Vorstellungen, Empfindungen und anderem vorsichgeht, daß aber diese begleitenden Vorgänge nicht das ‘Denken’ ausmachen & ihr Fehlen an sich noch nicht, was wir ‘Gedankenlosigkeit’ nennen.

32[2] Wenn man einen Rechnungsgang als Experiment auffaßt, so ist das Resultat des Experiments jedenfalls nicht das, was man das Resultat des Beweises nennt. Das Resultat der Rechnung ist der Satz, mit welchem sie abschließt; das Resultat des Experiments ist: daß ich von diesen Sätzen durch diese Regeln zu diesem Satz geführt wurde.

32[3] Aber nicht daran haftet unser Interesse, daß die & die (oder alle) Menschen von diesen Regeln so geleitet worden sind (oder so gegangen sind); es gilt uns als selbstverständlich, daß die Menschen – ‘wenn sie richtig denken können’ – *so* gehen. Wir haben jetzt aber einen *Weg* erhalten, sozusagen durch die Fußstapfen derer, die so gegangen sind. Und auf diesem Weg geht nun der Verkehr vor sich – zu verschiedenen Zwecken.

32[4] & 33[1] Wenn wir sagen: “dieser Satz folgt aus jenem”, so ist hier “folgen” wieder *unzeitlich* gebraucht. (Und das zeigt, daß dieser Satz nicht das Resultat eines Experiments ausspricht.)

33[2] Vergleiche damit: “Weiß ist heller als Schwarz”. Auch dieser Ausdruck ist zeitlos & auch er spricht das Bestehen einer *internen* Relation aus.

33[3] & 34[1] & 35[1] "Diese Relation *besteht* aber eben" – möchte man sagen. Aber die Frage ist: Hat dieser Satz einen Gebrauch – & welchen? Denn einstweilen weiß ich nur, daß mir dabei ein Bild vorschwebt – aber dies garantiert mir die Verwendung nicht – & daß die Worte einen deutschen Satz geben. Aber es fällt Dir auf, daß die Worte hier anders gebraucht werden, als im normalen Fall einer nützlichen Aussage. – Wie etwa der Radmacher bemerken kann, daß die Aussagen, die er gewöhnlich über Kreisförmiges & Gerades macht, anderer Art sind, als die, die im Euklid stehen. – Denn wir sagen: dieser *Gegenstand* ist heller als jener, oder, die Farbe dieses Dings ist heller als die Farbe jenes, & dann ist etwas jetzt heller & kann später dunkler sein. Woher die Empfindung, "Weiß ist heller als Schwarz" sage etwas über das *Wesen* der beiden Farben aus? – Aber ist die Frage überhaupt richtig gestellt? Was meinen wir denn mit dem 'Wesen' von Weiß oder Schwarz? Wir denken etwa an 'das Innere', 'die Konstitution', aber das ergibt hier doch keinen Sinn. Wir sagen etwa auch: "Es liegt im Weiß, daß es heller ist ...". Ist es nicht so: das Bild

eines schwarzen & eines weißen Flecks

dient uns *zugleich* als Paradigma dessen was wir unter "heller" & "dunkler" verstehen & als Paradigma für "weiß" & für "schwarz". In *so* fern 'liegt' nun die Dunkelheit 'im' Schwarz, als sie *beide* von diesem Fleck dargestellt werden. Er ist dunkel *dadurch daß* er schwarz ist– aber richtiger gesagt: er *heißt* "schwarz" & damit, in unserer Sprache, auch "dunkel". Jene Verbindung, eine Verbindung der Paradigmen & Namen ist in unsrer Sprache hergestellt. Und unser Satz ist unzeitlich, weil er nur die Verbindung der Worte “weiß”, “schwarz” & “heller” mit einem Paradigma ausspricht. Man kann Mißverständnisse vermeiden, dadurch daß man erklärt, es sei Unsinn, zu sagen: “die Farbe dieses Körpers ist heller, als die Farbe jenes”, es müsse heißen: “dieser Körper ist heller als jener”. D.h., man schließt jene Ausdrucksform aus unsrer Sprache aus.

35[2] Wir könnten auch sagen: Wenn wir den Schlußgesetzen (Schlußregeln) *folgen*, so liegt darin immer auch ein *Deuten* dieser Regeln.

35[3] “Aber wir folgern doch diesen Satz aus jenem, weil er tatsächlich folgt! Wir überzeugen uns doch, daß er folgt.” Wir überzeugen uns, daß, was hier steht, aus dem folgt, was dort steht. Und dieser Satz ist *zeitlich* gebraucht.

35[4] & 36[1] Wie ist es aber wenn ich mich davon überzeuge daß das Schema dieser Striche

| | | | |

gleichzahlig ist dem Schema dieser Eckpunkte

(ich habe sie absichtlich einprägsam gemacht), indem ich zuordne

36[2] Nun, wovon überzeuge ich mich denn, wenn ich diese Figur ansehe? Ich sehe einen Stern mit fadenförmigen Fortsätzen. –

36[3] Aber ich kann von der Figur so Gebrauch machen: Fünf Leute stehen im Fünfeck aufgestellt; an der Wand stehen Stäbe wie die Striche in ( ); ich sehe auf die Figur ( ) & sage: “ich kann jedem der Leute einen Stab geben.” Ich könnte die Figur ( ) als schematisches *Bild* davon auffassen, daß ich fünf Leuten je einen Stab gebe.

36[4] & 37[1] & 38[1] Wenn ich nämlich erst ein beliebiges Vieleck zeichne –

& dann eine beliebige Reihe von Strichen

|||||||||||||||||||||||||||||||

so kann ich nun durch Zuordnung herausfinden, ob ich oben so viele Ecken habe, wie unten Striche. (Ich weiß nicht, was herauskommen würde.) Und so kann ich auch sagen, ich habe mich durch das Ziehen der Projektionslinien davon überzeugt, daß am oberen Ende der Figur ( ) soviel Striche stehen, wie der Stern unten Ecken hat. (Zeitlich!) In dieser Auffassung gleicht die Figur nicht einem mathematischen Beweise (so wenig, wie es ein mathematischer Beweis ist, wenn ich einer Gruppe von Leuten einen Sack Äpfel austeile & finde, daß jeder gerade *einen* Apfel kriegen kann). Ich kann die Figur ( ) aber als mathematischen Beweis auffassen. Geben wir den Schemata ( ) & ( ) Namen! ( ) heiße “Hand” (H.), ( ) “Drudenfuß” (D.) Ich habe bewiesen, daß die Hand soviel Striche hat, wie der Drudenfuß Ecken. Und dieser Satz ist wieder unzeitlich.

38[2] Der Beweis – kann ich sagen – ist *eine* Figur, an deren einem Ende gewisse Sätze stehen & an deren anderm Ende ein Satz steht (den wir den 'bewiesenen' nennen). Man kann als Beschreibung so einer Figur sagen: in ihr folge der Satz ... aus ... & .... Das ist eine Form der Beschreibung eines *Musters*, das z.B. auch ein Ornament sein könnte. Ich kann also sagen: "In dem Beweise, welcher auf jener Tafel steht, folgt der Satz p aus q & r" & dies ist einfach eine Beschreibung dessen, was dort geschrieben ist. Es ist aber nicht der mathematische Satz, daß p aus q & r folgt. Dieser hat eine andere Anwendung. Er sagt – so könnte man es ausdrücken – daß es Sinn hat, von einem Beweise (Muster) zu reden, in welchem p aus q & r folgt. Wie man sagen kann, der Satz "Weiß ist heller als Schwarz" sage aus, es habe Sinn von zwei Gegenständen zu reden, von denen der hellere weiß, der andere schwarz sei, aber nicht von zwei Gegenständen, von denen der hellere schwarz, der andre weiß sei.

39[1] Denken wir uns, wir hätten das Paradigma für "heller" & "dunkler" in Form eines weißen & schwarzen Flecks gegeben, & nun leiten wir mit seiner Hilfe – sozusagen – ab: daß rot dunkler ist als weiß.

39[2] Der durch ( ) bewiesene Satz dient nun als neue Vorschrift zum Konstatieren der Gleichzahligkeit: Hat man eine Menge von Gegenständen in Form der Hand angeordnet & eine andre als die Ecken eines Drudenfußes, so sagen wir, die beiden Mengen seien gleichzahlig.

39[3] & 40[1] "Aber ist das nicht bloß, weil wir H. und D. schon einmal zugeordnet haben & gesehen, daß sie gleichzahlig sind?" – Ja, aber, wenn sie es in *einem* Fall waren, wie weiß ich, daß sie es jetzt wieder sein werden? – "Weil es eben im *Wesen* der H. & des D. liegt, daß sie gleichzahlig sind." – Aber wie konntest Du *das* durch die Zuordnung herausbringen? (Ich dachte die Zählung, oder Zuordnung, ergibt nur, daß diese beiden Gruppen, die ich jetzt vor mir habe, gleichzahlig – oder ungleichzahlig – sind.) – "Aber wenn er nun eine H. Dinge hat & einen D. Dinge & er ordnet sie nun tatsächlich einander zu, so ist es doch nicht *möglich*, daß er etwas anderes erhält, als daß sie gleichzahlig sind. – Und daß es nicht möglich ist, das sehe ich doch aus dem Beweis." – Aber *ist* es denn nicht möglich? Wenn er z.B. – wie ein Andrer sagen würde – eine der Zuordnungslinien zu ziehen *übersieht*. Aber ich gebe zu, daß er in der ungeheuern Mehrzahl der Fälle immer das gleiche Resultat erhalten wird &, erhielte er es nicht, sich für irgendwie gestört halten würde. Und wäre es nicht so, so würde dem ganzen Beweis der Boden entzogen. Wir entscheiden uns nämlich, das Beweisbild *statt* einer Zuordnung der Gruppen zu gebrauchen; wir ordnen sie *nicht* zu, sondern vergleichen statt dessen die Gruppen mit denen des Beweises (in welchem allerdings zwei Gruppen einander zugeordnet sind).

40[2] & 41[1] Ich könnte als Resultat des Beweises auch sagen: "Eine H. & ein D. heißen 'gleichzahlig'". [unreadable]Oder: Der Beweis *erforscht* nicht das Wesen der beiden Figuren, aber er spricht aus, was ich von nun an zum Wesen der Figuren rechnen werde. — Was zum Wesen gehört, lege ich unter den Paradigmen der Sprache nieder.

41[2] Wenn ich sage “Dieser Satz folgt aus jenem”, so ist das die Anerkennung einer Regel. Sie geschieht *auf Grund* des Beweises. D.h.: ich lasse mir diese Kette (diese Figur) als *Beweis* gefallen. — “Aber könnte ich denn anders? *Muß* ich mir sie nicht gefallen lassen?” – Warum sagst Du, Du müssest? Doch darum, weil Du am Schlusse des Beweises etwa sagst: “Ja – ich muß diesen Schluß anerkennen.” Aber das ist doch nur der Ausdruck Deiner unbedingten Anerkennung. – Das heißt, glaube ich: die Worte “Das muß ich zugeben” werden in *zweierlei* Fällen gebraucht: wenn wir einen Beweis erhalten haben – aber auch in Bezug auf den einzelnen Schritt selber des Beweises.

41[3] & 42[1] Und worin äußert es sich denn, daß der Beweis mich *zwingt*? Doch darin, daß ich so & so darauf vorgehe, daß ich mich weigere einen andern Weg zu gehen. Als letztes Argument, gegen Einen, der so nicht gehen wollte, würde ich nur noch sagen: “Ja siehst Du denn nicht …!” – & das ist doch kein *Argument*.

42[2] “Aber, wenn Du recht hast, wie kommt es dann, daß sich alle Menschen (oder doch alle normalen Menschen) diese Figuren als Beweise dieser Sätze gefallen lassen?” – Ja, es besteht eine große – & interessante – Übereinstimmung.

42[3] & 43[1] Denk Dir Du hättest eine Reihe von Kugeln vor Dir, Du numerierst sie nun mit arabischen Ziffern & es geht von 1 bis 100; dann machst Du nach je zehn (die sich in der Numerierung nun deutlich hervorheben) einen größern Abstand; in jedem Reihenstück von je 10 machst Du einen, etwas kleinern, Abstand in der Mitte, also zwischen 5 + 5 – so werden die 10 übersichtlich; nun nimmst Du die Zehnerstücke & legst sie eins *unter* das andere; & machst in der Mitte der Kolumne einen etwas größeren Abstand, also zwischen 5 Reihen + 5 Reihen; nun numerierst Du die Reihen von 1 bis 10. Ich kann sagen, ich habe Eigenschaften der hundert Kugeln entfaltet. – Nun aber denke Dir, daß dieser ganze Vorgang, dies Experiment mit den hundert Kugeln, gefilmt wurde. Ich sehe nun auf der Projektionsleinwand doch nicht ein Experiment, denn das Bild eines Experiments ist doch nicht selbst ein Experiment. – Aber das 'mathematisch Wesentliche' sehe ich nun auch in der Projektion! Denn es erscheinen da zuerst 100 Flecken, dann werden sie in Zehnerstücke eingeteilt, usw. usw..

43[2] Ich könnte also sagen: der Beweis dient mir nicht als Experiment, wohl aber als Bild eines Experiments.

43[3] & 44[1] Lege 2 Äpfel auf die leere Tischplatte, schau daß niemand in ihre Nähe kommt & der Tisch nicht erschüttert wird; nun lege noch 2 Äpfel auf die Tischplatte; nun zähle die Äpfel, die da liegen. Du hast ein Experiment gemacht; das Ergebnis der Zählung ist wahrscheinlich 4. (Wir würden das Ergebnis des Experiments so darstellen: wenn man unter den & den Umständen erst 2 & dann noch 2 Äpfel auf einen Tisch legt, verschwindet zumeist keiner, noch kommt einer dazu.) Und ganz ähnliche Experimente kann man, mit dem gleichen Ergebnis, mit allerlei festen Körpern – Bohnen, Büchern, Stäben etc. – ausführen. – So lernen ja die Kinder bei uns rechnen, denn man läßt sie drei Bohnen hinlegen & noch drei Bohnen & dann zählen, "was da liegt". Käme dabei einmal 5 einmal 7 heraus (weil, *wie wir jetzt sagen würden*, einmal von selbst eine dazu, einmal eine weg käme), so würden wir zunächst Bohnen als zum Rechenunterricht ungeeignet erklären. Geschähe das Gleiche aber mit Stäben, Fingern, Strichen & den meisten andern Dingen, so hätte das Rechnen damit ein Ende.

"Aber wäre dann nicht doch noch 2 + 2 = 4?" – Dieses Sätzchen wäre damit unbrauchbar geworden. –

44[2] Wenn wir *Geld* in eine Lade legen & später finden wir es nicht mehr dort, so sagen wir: "Von selbst ist es nicht verschwunden." Dies ist ein wichtiger Satz der Physik.

44[3] & 45[1] "Du brauchst ja nur auf die Figur

zu sehen, um zu sehen, daß 2 + 2 = 4 ist." – Dann brauche ich nur auf die Figur zu schauen, um zu sehen, daß $2 + 2 + 2 = 4$ ist.

45[2] Zählen mittels musikalischer Themen. Vergleiche die Anzahlen dieser beiden Reihen von Strichen

||||||||||||| ||||||||||||||||

indem Du einmal für jeden Strich in der ersten Reihe, einen Ton des Themas … pfeifst; dann für jeden Strich in der zweiten Reihe. (Addieren etc. mit Hilfe einer solchen Tonreihe.)

45[3] &
46[1] Wir lehren jemand eine Methode, Nüsse unter Leute zu verteilen; ein Teil dieser Methode ist das Multiplizieren zweier Zahlen im Dezimalsystem. Wir lehren jemand ein Haus errichten; dabei auch, wie er sich die genügenden Mengen von Material, etwa Brettern, anschaffen soll, hiezu eine Technik des Rechnens. Die Technik des Rechnens ist ein Teil der Technik des Hausbaues. Leute verkaufen & kaufen Scheitholz; die Stöße werden mit einem Maßstab gemessen, die Maßzahlen der Länge, Breite, Höhe multipliziert; & was hiebei herauskommt ist die Zahl der Groschen, die sie zu fordern & zu geben haben. Sie wissen nicht, ‘warum’ dies so geschieht, sondern sie machen es einfach so, so wird es gemacht. – Rechnen diese Leute nicht?

46[2] Wer so rechnet, muß er einen ‘arithmetischen *Satz*’ aussprechen? Wir lehren freilich die Kinder das Einmaleins in Form von *Sätzchen*, aber ist das wesentlich? Warum sollten sie nicht einfach: *rechnen lernen*. Und wenn sie es können, haben sie nicht Arithmetik gelernt?

46[3] Aber in welchem Verhältnis steht dann die *Begründung* eines Rechenvorgangs zu dem Rechenvorgang (selbst)?

47[1] "Ja, ich verstehe, daß dieser Satz aus diesem folgt." – Verstehe ich *warum* er folgt, oder verstehe ich nur, *daß* er folgt?

47[2] Wie, wenn ich gesagt hätte: Jene Leute zahlen für's Holz *auf Grund der Rechnung*, sie lassen sich die Rechnung als Beweis dafür gefallen, daß sie so viel zu zahlen haben. – Nun, es ist einfach eine Beschreibung ihres Vorgehens (Benehmens).

47[3] Wer uns erinnert: "die Kette der Gründe hat ein Ende", stellt den Ursprung der Kette mit ihrer Mitte zusammen, daß wir den Unterschied wahrnehmen. 'Schau *das* an – & schau *das* an! *Präg' Dir diese beiden Formen ein*!'

47[4] Die Logik – kann man sagen – zeigt, was wir unter "Satz" & unter "Sprache" verstehen. –

47[5] Trenne die Gefühle (Gesten) der Übereinstimmung von dem, was Du mit dem Beweise *machst*!

47[6] & 48[1] Jene Leute – würden wir sagen – verkaufen das Holz nach dem Kubikmaß – – aber haben sie darin recht? Wäre es nicht richtiger, es nach dem Gewicht zu verkaufen – oder nach der Arbeitszeit des Fällens – oder nach der Mühe des Fällens, gemessen am Alter & an der Stärke des Holzfällers? Und warum sollten sie es nicht für einen Preis hergeben, der von alle dem unabhängig ist: jeder Käufer zahlt ein und dasselbe, wieviel immer er nimmt (man hat gefunden, daß man so leben kann). Und ist etwas dagegen zu sagen, daß man das Holz einfach verschenkt?

48[2] Gut; aber wie wenn sie das Holz in Stöße von beliebigen, verschiedenen Höhen schlichteten, & es dann zu einem Preis proportional der Grundfläche der Stöße verkauften? Und wie, wenn sie dies sogar mit den Worten begründeten: “Ja, wer mehr Holz kauft, muß auch mehr zahlen.”

48[3] & 49[1] Wie könnte ich ihnen nun zeigen, daß – wie ich sagen würde – der nicht wirklich mehr Holz kauft, der einen Stoß von größerer Grundfläche kauft? – Ich würde z.B. einen, nach ihren Begriffen, kleinen Stoß nehmen & ihn durch Umlegen der Scheiter in einen ‘großen’ verwandeln. Das *könnte* sie überzeugen – vielleicht aber würden sie sagen: “Ja, jetzt ist es *viel* Holz & kostet mehr” – & damit wäre es Schluß. – Wir würden in diesem Falle (wohl) sagen: sie meinen mit “viel Holz” & “wenig Holz” einfach nicht das Gleiche, wie wir; & sie haben ein ganz anderes System der Bezahlung, als wir.

49[2] Frege sagt im Vorwort der Grundgesetze der Arithm.: “… hier haben wir eine bisher unbekannte Art der Verrücktheit” – aber er hat nie angegeben, wie diese ‘Verrücktheit’ wirklich aussehen würde.

49[3] (Eine Gesellschaft, die so handelt, würde uns vielleicht an die “Klugen Leute” in den Märchen erinnern.)

49[4] & 50[1] Einfluß der Darstellungsform: Wer auf einer Straße spazierengeht & (nun) umkehrt, um nach Hause zu gehen, der kehrt bei einem Baum, bei einem Haus, bei einer Brücke, um, nicht an beliebiger Stelle in offenem Gelände (sozusagen ohne Grund). Tut er dies zu einem Zweck? (Wörter, die wir dem Rhythmus zuliebe in den Satz einfügen.)

50[2] Worin besteht die Übereinstimmung der Menschen in der Anerkennung einer Struktur als eines Beweises? Darin, daß sie Worte als *Sprache* gebrauchen? Als das, was wir “Sprache” nennen. Denke Dir Menschen, die Geld im Verkehr gebrauchten, nämlich Münzen, die ganz so aussehen wie unsre Münzen, aus Gold oder Silber sind & geprägt; & sie geben sie auch für Waren her – aber jeder gibt für die Waren, was ihm gerade gefällt & der Kaufmann gibt dem Kunden nicht mehr, oder weniger, je nachdem er bezahlt; kurz, dies Geld, oder was so aussieht, spielt bei ihnen eine ganz andere Rolle, als bei uns. Wir würden uns diesen Leuten viel weniger verwandt fühlen, als solchen, die noch gar kein Geld kennen & eine primitive Art des Tauschhandels treiben. – “Aber die Münzen dieser Leute werden doch auch irgend einen Zweck haben!” – Hat denn alles, was man tut, einen Zweck? Etwa religiöse Handlungen –.

51[1] Es ist schon möglich, daß wir geneigt wären, Menschen, die sich so benehmen, Verrückte zu nennen. Aber doch nennen wir nicht alle (die) Verrückte, die in den Formen unserer Kultur ähnlich handeln, Worte ‘zwecklos’ verwenden. (Denke an die Krönung eines Königs!)

51[2] & 52[1] Wir können es ‘die Gleichung $74202 + 25798 = 100000$ beweisen’ nennen, wenn wir die Zahlen der linken Seite untereinander schreiben & addieren; aber heißt auch das ein Beweis: zähle 74202 Sandkörner ab, dann 25798, schütte sie zusammen & zähle sie. Ich will sagen: zum Beweis gehört Übersichtlichkeit. Wäre der Prozeß, durch den ich das Resultat erhalte, nicht überblickbar, so könnte ich zwar die Tatsache, daß diese Zahl herauskommt, vermerken, wie aber soll ich dies zum Maß einer Tatsache gebrauchen? Ich weiß nicht: ‘was herauskommen *soll*’

52[2] Habe ich die Zahlen addiert & 100000 erhalten, so sage ich nun: Wenn Du soviel & soviel Sandkörner zusammenschüttest & keines kommt weg, so mußt Du im ganzen so viele Körner haben.

52[3] Aber ist es denn unmöglich, daß ich mich in der Rechnung geirrt habe? Und wie, wenn mich ein Teufelchen irrt, so daß ich irgend etwas immer wieder übersehe, so oft ich auch, Schritt für Schritt, nachrechne. So daß, wenn ich aus der Verhexung erwachte, ich sagen müßte: “Ja war ich denn blind!” – Aber welchen Unterschied macht es, wenn ich dies ‘annehme’? Ich könnte dann sagen: “Ja ja, die Rechnung ist gewiß falsch – aber so rechne ich. Und das nenne ich nun addieren, & diese Zahl die Summe dieser beiden.”

52[4] & 53[1] Denke, jemand würde so behext, daß er rechnete:

“also: $4 \times 3 + 2 = 10$”

53[2] Nun soll er seine Rechnung anwenden. Er nimmt viermal 3 Nüsse & noch 2, & verteilt sie unter 10 Leute; & jeder erhält *eine* Nuß. Denn er teilt sie, den Bögen der Rechnung entsprechend, aus & sooft er Einem eine zweite Nuß gibt, ist sie verschwunden.

53[3] Man könnte auch sagen: Du schreitest in dem Beweis von Satz zu Satz: aber läßt Du Dir denn auch eine Kontrolle dafür gefallen, daß Du richtig gegangen bist? – Oder sagst Du bloß, "Es *muß* stimmen" & mißt (nur) alles andre mit dem Satz, den Du erhältst?

53[4] Denn, wenn es *so* ist, dann schreitest Du nur von Bild zu Bild.

53[5] & 54[1] Es könnte praktisch sein, mit einem Maßstab zu messen, der die Eigenschaft hat, sich um etwa die Hälfte seiner Länge zusammen zu ziehen, wenn er aus diesem Raum in jenen gebracht wird. Eine Eigenschaft die ihn unter andern Verhältnissen zum Maßstab unbrauchbar machen würde. Es könnte praktisch sein, beim Abzählen einer Menge, unter gewissen Umständen, Ziffern auszulassen, sie abzuzählen: "1, 2, 4, 5, 7, 8, 10".

54[2] Wovon überzeuge ich Einen, der jene Abbildung im Film des Versuchs mit den 100 Kugeln verfolgt? Man könnte sagen: davon, daß sich dies so zugetragen hat. – Aber das wäre keine mathematische Überzeugung. − − Aber kann ich denn nicht sagen: *ich präge ihm einen Vorgang ein*? Dieser Vorgang ist die Umgruppierung einer Reihe von 100 Dingen in 10 Reihen zu 10. Und dieser Vorgang ist *tatsächlich* immer wieder leicht durchzuführen. Und davon kann er mit Recht überzeugt sein. Und so prägt (auch) der Beweis durch Ziehen der Projektionslinien

einen Vorgang ein, den der 1 → 1 Zuordnung der H. & des D.. – “Aber *überzeugt* er mich nicht auch davon, daß diese Zuordnung *möglich* ist?” – Wenn das heißen soll: daß Du sie immer ausführen kannst –, so muß das durchaus nicht wahr sein. Aber das Ziehen der Projektionslinien überzeugt uns davon, daß oben soviele Striche sind, wie unten Ecken; & es liefert eine Vorlage, (nur) dadurch solche Figuren einander zuzuordnen. – “Aber zeigt sie dadurch nicht, daß es geht? In dem Sinne, in welchem es nicht ginge, wenn oben statt ||||| die Figur |||||| stünde?” – Wieso? geht es denn da nicht? *So* z.B.:

“So hab ich’s nicht gemeint!” – Dann zeig mir, wie Du’s meinst, & ich werde es machen. Aber kann ich denn nicht sagen, die Figur zeige, *wie* eine solche Zuordnung möglich ist – & muß sie also nicht auch zeigen, *daß* sie möglich ist? –

55[2] & 56[1] & 57[1] Was war denn damals der Sinn davon, daß wir vorschlugen den Formen der 5 parallelen Striche & des Fünfecksterns Namen beizulegen? Was ist damit geschehen, daß sie Namen gekriegt? Es wird dadurch (wohl) etwas über die Art des Gebrauchs dieser Figuren angedeutet. Nämlich –: daß man sie auf einen Blick als die & die erkennt; man denkt nicht dran, ihre Striche oder Ecken zu zählen, sondern erkennt sie als Gestalttypen, wie Messer und Gabel, die Buchstaben & Ziffern erkennt. Ich kann also auf den Befehl: "Zeichne eine H.!" (z.B.) diese Form unmittelbar wiedergeben. – Nun lehrt mich der Beweis eine Zuordnung jener beiden Formen. (Ich möchte sagen, es seien in dem Beweis nicht bloß diese individuellen Figuren zugeordnet, sondern die *Formen selbst*. Aber das heißt doch nur, daß ich mir jene Formen gut einpräge; als Paradigmen einpräge.) Kann ich nun, wenn ich (die Formen) H. & D. einander so zuordnen will, nicht in Schwierigkeiten geraten – indem etwa eine Ecke unten zuviel, oder oben ein Strich zu viel ist? – "Aber doch nicht, wenn Du wirklich wieder H. & D. gezeichnet hast! – Und das läßt sich ja beweisen; sieh diese Figur an!"

57[2] – Diese Figur lehrt mich eine neue Art der Kontrolle dafür, daß ich wirklich die gleichen Figuren hingezeichnet habe; aber kann ich, wenn ich mich nun nach dieser Vorlage richten will, nicht dennoch in Schwierigkeiten geraten? Ich sage aber, ich bin sicher, daß ich normalerweise in keine Schwierigkeiten kommen werde.

57[3] Was tut nun diese Überlegung? –

57[5] & 58[1] Es gibt ein Geduldspiel, das darin besteht, eine bestimmte Figur, z.B.:

aus gegebenen Teilen (Plättchen) zusammenzusetzen. Die Teilung der Figur ist so, daß es uns schwer wird, die richtige Zusammenstellung der Teile zu finden. Sie sei etwa diese:

58[2] & 59[1] Was findet der, dem die Zusammensetzung gelingt? – Er findet: eine Lage – an welche er früher nicht gedacht hat. – Gut; aber kann man also nicht sagen: er überzeugt sich davon, daß man ein Dreieck & ein Sechseck so zusammenlegen kann? – Aber sag mir: – dieses Dreieck & das Sechseck, welche man so zusammenlegen kann: sollen sie schon so ineinander liegen, oder noch nicht, & erst so zusammengelegt werden?

"Ich habe nicht gewußt, daß man und

so

zusammenlegen kann." Kann man auch sagen: "Ich habe gedacht, man könne sie nicht so

zusammenzulegen"?

59[2] & 60[1] Wer sagt: "Ich hätte nicht geglaubt, daß man diese Figuren so zusammensetzen kann", dem kann man doch nicht, auf das zusammengesetzte Geduldspiel zeigend, sagen: "So, Du hast nicht geglaubt, daß man die Stücke so zusammensetzen kann?" – Er würde antworten: "Ich meine: ich habe an diese Art der Zusammensetzung gar nicht gedacht."

60[2] & 61[1] Denken wir uns die physikalischen Eigenschaften der Teile des Geduldspiels so, daß sie in die gesuchte Lage nicht kommen können. Ich meine aber nicht, daß man einen Widerstand empfindet, wenn man sie in diese Lage bringen will, sondern man macht einfach alle andern Versuche, nur *den* nicht & die Stücke kommen auch durch Zufall nicht in diese Lage. Es ist gleichsam diese Lage aus dem Raum ausgeschlossen. Als wäre hier ein 'blinder Fleck', etwa in unserm Gehirn. – Und *ist* es denn nicht so, wenn ich glaube, alle *möglichen* Stellungen versucht zu haben & an dieser, wie durch Verhexung, immer vorbeigegangen bin? Kann man nicht sagen: die Figur, die Dir die Lösung zeigt, beseitigt eine Blindheit; oder auch, sie ändert Deine Geometrie? Sie zeigt Dir gleichsam eine neue Dimension des Raumes. (Wie wenn man einer Fliege den Weg aus dem Fliegenglas zeigte.)

61[2] Ein Wesen hat diese Lage mit einem Bann umzogen & aus unserm Raum ausgeschlossen.

61[3] Die neue Lage ist wie aus dem Nichts entstanden. Dort, wo früher nichts war, dort ist jetzt auf einmal etwas.

61[4] In wiefern hat Dich denn *die Lösung* davon überzeugt, daß man *das & das* kann? – Du konntest es ja früher *nicht* – & jetzt kannst Du es etwa. –

61[5] & 62[1] Du hast mir einen Weg gezeigt, den ich bisher nicht gesehen hatte. – Aber war dieser Weg nicht immer schon im Raum? – Das heißt nichts. Der Weg, von dem ich rede, ist ein wirklicher Weg – der mir nun als Vorlage dient. – Aber Du hast doch früher geglaubt, daß es diesen Weg nicht gibt! – Das heißt: ich bin nicht im Stande gewesen, mir diesen Weg vorzustellen. – Aber Du hast also versucht, Dir ihn vorzustellen – wie hast Du das gemacht? – Ich habe Verschiedenes getan, was man in diesem Fall "versuchen ..." nennt. Was tue ich denn, wenn ich versuche, das Geduldspiel richtig zusammenzustellen & es nicht treffe? Nun ich mache verschiedene Zusammenstellungen dieser Figuren. Ist an diesen Zusammenstellungen etwas *falsch*? – Ich bin unbefriedigt, ich zerstöre sie wieder; ich sage auch: "*das* muß herauskommen" & zeige auf den Umriß der fertigen Figur. – Wenn es mir gelingt diesen Umriß zu treffen, so bin ich befriedigt, sage, es sei mir gelungen. – Nein, das ist nicht genug: ich bin befriedigt, wenn es mir gelingt, *dies*, diese Zusammenstellung dieser Figuren, zu legen. Das heißt also: – *wenn ich sie lege*.

62[2] Worauf mache ich aufmerksam? – Darauf, daß der Wunsch die Figur zu legen in diesem Falle anders aussieht, als in dem Falle, in welchem ich wünsche, diese Zusammenstellung, auf welche ich im Bild zeigen kann, zu legen. Der Wunsch sieht anders aus, das Probieren sieht anders aus, aber die Lösung sieht in beiden Fällen gleich aus.

63[1] Und der mich ‘überzeugt hat, daß man es machen kann’, hat mir im einen Fall eine Vorlage gegeben – & das heißt hier: ‘mich in Stand setzen, es zu machen’. Im andern Fall hätte er mir etwa gezeigt, daß er die Kraft hat, etwas zu tun, wozu ich die Kraft nicht habe.

63[2] & 64[1] “Ja, Du hast mich überzeugt, daß die H. & der D. gleichzahlig sind.” – *Wie* hat er mich überzeugt? Er hat mir ein Bild gezeigt, das ich bis dahin nicht gesehen hatte. – Ja, aber er hat Dich dadurch von der Möglichkeit dieses Bildes überzeugt, an die Du früher nicht geglaubt hattest. – Aber hier muß man sich fragen: worin bestand es, ‘nicht an diese Möglichkeit zu glauben’? Ich hatte etwa ‘versucht’, sie zu sehen, aber sie nicht gesehen. Und das heißt doch: ich *hatte das Bild nicht gesehen*. Besser wäre es, zu sagen: er hatte mir eine Möglichkeit gezeigt, die ich nicht gekannt hatte. – Aber warum bin ich hier geneigt, zu sagen, er habe mir eine *Möglichkeit* gezeigt, & nicht einfach ‘ein Bild’? Denn ich könnte ja immer, wenn man mir irgend ein Bild zeigt, das ich bisher nicht gesehen hatte, sagen: “Ja, Du hast mir gezeigt, daß dies möglich ist.” Und doch fiele das niemandem ein. – Obwohl das auch einfach die Formel sein könnte, mit der man ausdrückt, man habe das noch nicht gesehen. Nun, die Möglichkeit ist doch wohl eine, die früher beschrieben wurde, z.B.: “die Figuren auf diese Weise einander zuzuordnen”. Und diese *Aufgabe* ist von der Art der des Geduldspiels. Frage Dich: in welchem Verhältnis steht die Aufgabenstellung zur Lösung. Ja, man kann wohl sagen: die Aufgabe ‘*beschreibt*’ die Lösung. Verschiedene Anwendungen des Wortes “beschreiben”.

64[2] & 65[1] & 66[1] Es schien zuerst, als sollten diese Überlegungen zeigen, daß, ‘was ein logischer Zwang zu sein scheint, in Wirklichkeit nur ein psychologischer ist’ – & da fragte es sich doch: kenne ich also beide Arten des Zwanges?! – Denke Dir es würde der Ausdruck gebraucht: “Das Gesetz § ... bestraft den Mörder mit dem Tode.” Das könnte doch nur heißen, dieses Gesetz laute: u.s.w.. Diese Form des Ausdrucks aber könnte sich uns aufdrängen, weil das Gesetz Mittel ist, wenn der Schuldige der Bestrafung zugeführt wird. – Nun reden wir von ‘Unerbittlichkeit’ bei denen, die jemand bestrafen. Da könnte es uns einfallen zu sagen: das Gesetz ist unerbittlicher, als alle Menschen, denn sie können den Schuldigen laufen lassen, das Gesetz richtet ihn hin. (Oder sogar: “das Gesetz richtet ihn *immer* hin”.) – Wozu ist so eine Ausdrucksform zu gebrauchen? – Zunächst sagt dieser Satz ja nur, im Gesetz stehe das & das, & die Menschen richten sich manchmal nicht danach. Dann aber zeigt er doch das Bild des *einen* unerbittlichen – & vieler laxer Richter. Er dient darum als Ausdruck des Respekts vor dem Gesetz. Endlich aber kann man die Ausdrucksform auch so gebrauchen, daß man ein Gesetz ‘unerbittlich’ nennt, wenn es die Möglichkeit der Begnadigung nicht vorsieht & im entgegengesetzten Fall etwa ‘einsichtig’. Wir reden nun von der ‘Unerbittlichkeit’ der Logik; & denken uns die logischen Gesetze unerbittlich, unerbittlicher noch, als die Naturgesetze. Wir machen nun darauf aufmerksam, wie das Wort “unerbittlich” auf mehrerlei Weise angewendet wird. Es entsprechen unsern logischen Gesetzen sehr allgemeine Tatsachen der täglichen Erfahrung. Es sind die, die es uns möglich machen, jene Gesetze immer wieder auf einfache

Weise (mit Tinte auf Papier z.B.) zu demonstrieren. Sie sind zu vergleichen mit jenen Tatsachen, welche die Messung mit dem Meterstab leicht ausführbar & nützlich machen. Das legt den Gebrauch gerade dieser Schlußgesetze nahe, & nun sind *wir* unerbittlich in der Anwendung dieser Gesetze. Weil wir '*messen*'; & es gehört zum Messen, daß Alle das gleiche Maß haben. Außerdem aber kann man unerbittliche, d.h. *eindeutige*, von nicht eindeutigen Schlußregeln unterscheiden, ich meine von solchen, die uns eine Alternative freistellen.

67[1] Ich sagte, 'ich lasse mir das & das als Beweis eines Satzes gefallen' – aber kann ich mir die Figur, die die Stücke des Geduldspiels zusammengefügt zeigt, *nicht* als Beweis dafür gefallen lassen, daß man jene Stücke zu diesem Umriß zusammensetzen kann?

67[2] Aber denk nun eines der Stücke liege so, daß es das *Spiegelbild* des entsprechenden Teils der Vorlage ist. Er will nun die Figur nach der Vorlage zusammensetzen, sieht, es muß gehen, kommt aber nicht auf den Einfall das Stück umzuwenden & findet daß ihm das Zusammensetzen nicht gelingt.

67[3] & 68[1] & 69[1] & 70[1] Wie schätzt man: wieviel Uhr es ist; ich meine aber nicht, nach äußeren Anhaltspunkten, dem Stand der Sonne, der Helligkeit im Zimmer u. dergl.? – Man fragt sich etwa: “wie viel Uhr kann es sein?”, überlegt einen Augenblick; d.h. hier: man hält sich ruhig, stellt sich vielleicht das Zifferblatt vor; & dann spricht man die & die Zeit aus. – Oder man überlegt sich mehrere Möglichkeiten: man denkt sich *eine* Zeit, dann eine andre, & bleibt endlich bei einer stehen. So & ähnlich geht es vor sich. – Aber ist nicht der Einfall von einem Gefühl der Überzeugung begleitet; & heißt das nicht, daß er nun mit einer inneren Uhr übereinstimmt? – Nein, ich lese die Zeit von keiner Uhr ab; ein Gefühl der Überzeugung ist in so fern da, als ich mir ohne Empfindungen des Zweifels mit Ruhe & Sicherheit eine Zeit sage. – Aber schnappt nicht etwas bei dieser Zeitangabe ein? – Nichts, das ich wüßte; wenn Du nicht das Zur-Ruhe-Kommen der Überlegung, das Stehenbleiben auf einer Zahl so nennst. Ich hätte auch hier nie von einem ‘Gefühl der Überzeugung’ geredet, sondern gesagt: ich habe eine Weile überlegt & mich dann dafür entschieden, daß es … Uhr ist. Wonach aber hab’ ich mich entschieden? Ich hätte vielleicht gesagt: “bloß nach dem Gefühl”; das heißt nur: ich habe es dem Einfall überlassen. – Aber Du mußtest Dich doch wenigstens zum Schätzen in einen bestimmten Zustand versetzen; und Du nimmst doch nicht jede Vorstellung irgend einer Zeitangabe, als Angabe der richtigen Zeit! – Wie gesagt: *ich hatte mich gefragt*, “wieviel Uhr mag es sein?”, d.h. ich habe diese Frage nicht, z.B., in einer Erzählung gelesen, noch sie als Ausspruch eines Andern zitiert, noch mich im Aussprechen dieser Wörter geübt, usf. – nicht unter *diesen* Umständen habe ich die Worte gesprochen. – Aber unter *welchen* also? – Nun, ich dachte an mein Frühstück & ob es heute spät damit würde. Solcherart waren die Umstände. – Aber siehst Du denn wirklich nicht, daß Du doch in einem, wenn auch (quasi) ungreifbaren, für das Schätzen der Zeit charakteristischen Zustand, gleichsam in einer dafür charakteristischen Atmosphäre warst? –Ja, das Charakteristische war, daß ich mich fragte: "Wieviel Uhr mag es sein?" – & hat dieser Satz eine bestimmte Atmosphäre, wie soll ich sie von ihm selbst trennen können? Es wäre mir nie eingefallen, der Satz hätte einen solchen Dunstkreis, wenn mir nicht eingefallen wäre, wie man ihn auch anders – als Zitat, im Scherz, als Sprechübung, etc. – sagen kann. Und *da* wollte ich auf einmal sagen, da erschien es mir auf einmal: ich müßte die Worte doch irgendwie besonders *gemeint* haben; anders nämlich, als in jenen andern Fällen. Es hatte sich mir das Bild von der besonderen Atmosphäre aufgedrängt; ich sehe sie förmlich vor mir – solange ich nämlich nicht auf das sehe, was nach meiner Erinnerung wirklich gewesen ist. Und was das Gefühl der Sicherheit anbelangt: so sage ich mir manchmal: "ich bin sicher, es ist so & so viel Uhr", & in mehr oder weniger sicherem Tonfall, etc. Fragst Du nach dem *Grund* für diese Sicherheit, so habe ich keinen. Wenn ich sage: ich lese es auf meiner inneren Uhr ab, so ist das ein Bild, dem doch nur entspricht, daß ich diese Zeitangabe gemacht habe. Und der Zweck des Bildes ist diesen Fall, dem andern anzuähneln. Ich sträube mich, die beiden verschiedenen Fälle anzuerkennen.

71[1] Von größter Wichtigkeit ist die Idee der Ungreifbarkeit jenes Zustandes bei der Zeitschätzung. Warum ist er *ungreifbar*? Ist es nicht, weil wir, was an dem Zustand, in dem wir uns befinden, greifbar ist, uns weigern, zu dem spezifischen Zustand zu rechnen, den wir postulieren?

71[2] & 71[3] & 72[1] Man kann ein Rechteck aus zwei Parallelogrammen & zwei Dreiecken zusammensetzen. Beweis:

Ein Kind würde die Zusammensetzung eines Rechtecks aus diesen Bestandteilen schwer treffen & davon überrascht sein, daß zwei Seiten der Parallelogramme in eine grade Linie fallen, wo doch die Parallelogramme schief sind. – Es könnte ihm vorkommen, daß das Rechteck gleichsam durch Zauberei aus diesen Figuren wird. Ja, es muß zugeben, daß sie nun ein Rechteck bilden, aber durch einen Dreh, durch eine vertrackte Stellung, auf unnatürliche Weise. Ich kann mir denken, daß das Kind, wenn es die beiden Parallelogramme in *der* Weise zusammengelegt hat, seinen Augen nicht traut, wenn es sieht daß sie *so* zusammenpassen. '*Sie sehen nicht aus*, als ob sie so zusammenpaßten.' Und ich könnte mir denken, daß man sagt: Es erscheint uns nur durch ein Blendwerk, als gäben *sie* das Rechteck – in Wirklichkeit haben sie ihre Natur verändert, sie sind nicht mehr die Parallelogramme.

72[2] & 73[1] & 74[1] Aber kann ich den Satz der Geometrie nicht auch ohne Beweis glauben, z.B. auf die Versicherung eines Andern hin? – Und was verliert der Satz, wenn er seinen Beweis verliert? – Ich soll hier wohl fragen: "Was kann ich mit ihm anfangen?", denn darauf kommt es an. Den Satz auf die Versicherung des Andern *annehmen* – wie zeigt sich das? Ich kann ihn z.B. in weiteren Operationen verwenden, oder ich verwende ihn bei der Beurteilung eines physikalischen Sachverhalts. Versichert mich jemand z.B., 13 mal 13 sei 396, & ich glaube ihm, so werde ich mich nun wundern, daß ich 396 Nüsse nicht in 13 Reihen zu je 13 Nüssen legen kann & vielleicht annehmen die Nüsse hätten sich von selbst vermehrt. Aber ich fühle mich versucht, zu sagen: man könne nicht *glauben*, daß 13 × 13 = 396 ist, man könne diese Zahl nur mechanisch vom Andern *annehmen*. Aber warum soll ich nicht sagen, ich glaubte es? Ist denn es glauben ein geheimnisvoller Akt, der, sozusagen, unterirdisch mit der richtigen Rechnung in Verbindung steht? Ich kann doch jedenfalls sagen: "ich glaube es", & nun danach handeln. Man möchte (hier) fragen: "Was tut der, der glaubt, daß 13 × 13 = 396 ist?" Und man kann antworten: Nun, das wird davon abhängen, ob er z.B. die Rechnung selber gemacht & sich (dabei) verschrieben hat, – oder ob sie zwar ein Anderer gemacht hat, er aber doch weiß, wie man so eine Rechnung macht, – oder ob er nicht multiplizieren kann, aber weiß daß das Produkt die Zahl der Leute ist, die in 13 Reihen zu je 13 stehen, – kurz davon, was er denn mit der Gleichung 13 × 13 = 396 anfangen kann. Denn, sie prüfen, ist etwas mit ihr anfangen.

74[2] Denkt man nämlich an die arithmetische Gleichung als den Ausdruck einer internen Relation, so möchte man sagen: “Er kann ja gar nicht glauben, daß 13 × 13 *dies* ergibt, weil das ja keine Multiplikation von 13 mit 13, oder kein *Ergeben* ist, wenn 396 am Ende steht.” Das heißt aber (nur), daß man das Wort “glauben” auf das Resultat einer Rechnung nicht anwenden will, – oder nur dann, wenn man die richtige Rechnung vor sich hat.

74[3] & 75[1] “Was glaubt der, der glaubt, 13 × 13 ist 396?” – Wie tief dringt er – könnte man sagen – mit seinem Glauben in das Verhältnis dieser Zahlen ein? Denn bis zum Ende – wollen wir sagen – kann er nicht dringen, sonst könnte er es nicht glauben. Aber wann dringt er in die Verhältnisse der Zahlen ein? Gerade während er sagt, daß er glaubt ...? Darauf wirst Du nicht bestehen – denn es ist leicht zu sehen, daß dieser Schein nur durch die Oberflächenform unsrer Grammatik – wie man es nennen könnte – erzeugt wird.

75[2] Denn ich will sagen: “Man kann nur *sehen*, daß 13 × 13 = 369 ist, & man kann auch das nicht *glauben*. Man kann nur noch mehr oder weniger blindlings, eine Regel annehmen.” Und was tue ich, wenn ich dies sage? Ich mache einen Schnitt; zwischen einer *Rechnung* mit ihrem Resultat (d.i. einem bestimmten Bild, einer bestimmten Vorlage) – & einem Versuch mit seinem Ergebnis.

75[3] & 76[1] Ich möchte sagen: “Wenn ich glaube, daß $x \times y = z$ ist – & es kommt ja vor, daß ich so etwas glaube, sage, daß ich es glaube – so glaube ich nicht den mathematischen Satz, denn der steht am Ende eines Beweises, ist das Ende eines Beweises; sondern ich glaube, daß dies die Formel ist, die dort & dort steht, die ich so & so erhalten werde, u. dergl..” – Und dies klingt ja, als dränge ich in den Vorgang des Glaubens eines solchen Satzes ein. Während ich nur – in ungeschickter Weise – auf den *fundamentalen* Unterschied der Rollen deute – eines arithmetischen Satzes & eines Erfahrungssatzes, (im Gegensatz zu ihrer scheinbaren Ähnlichkeit.) Denn ich *sage* eben unter gewissen Umständen: “ich glaube, daß $x \times y = z$ ist”. Was *meine* ich damit? – Was ich *sage*! – Wohl aber ist die Frage interessant: unter was für Umständen sage ich dies; & wie sind sie charakterisiert im Gegensatz zu denen von: “ich glaube, es wird regnen”? Denn was uns beschäftigt ist ja dieser Gegensatz. Wir verlangen danach ein Bild zu erhalten von der Verwendung der mathematischen Sätze & der Sätze “ich glaube, daß ...”, wo auf das “daß” ein Satz der Mathematik folgt.

76[2] “Du glaubst doch nicht den mathematischen Satz. –” Das heißt: “mathematischer Satz” bezeichnet mir eine Rolle, ein Sprachspiel, worin ein Glauben nicht vorkommt.

76[3] & 77[1] Vergleiche: “Wenn Du sagst: ‘ich glaube, daß das Rochieren so & so geschieht’, so glaubst Du nicht die Schachregel, sondern Du glaubst etwa, daß so eine Regel des Schach lautet.”

77[2] & 78[1] "Man kann nicht *glauben*, die Multiplikation 13 × 13 liefere 369, weil das Resultat zur Rechnung gehört." – Was nenne ich "die Multiplikation 13 × 13"? Nur das richtige Multiplikationsbild, an dessen unterem Ende 369 steht? oder auch eine 'falsche Multiplikation'? Wie ist festgelegt, welches Bild die Multiplikation 13 × 13 ist? – Ist es nicht durch die Multiplikationsregeln *bestimmt*? – Aber wie, wenn Dir mit Hilfe dieser Regeln heute etwas anderes herauskommt, als was in allen Rechenbüchern steht? Ist das nicht möglich? – "Nicht, wenn Du die Regeln anwendest, wie *sie*!" – Freilich nicht! Aber das ist ja ein Pleonasmus. Und wo steht, wie sie anzuwenden sind – & wenn es wo steht, wo steht, wie *dies* anzuwenden ist? Und das heißt nicht nur: in welchem Buch steht es, sondern auch, in welchem *Kopf*? – Was ist also die Multiplikation 13 × 13 – oder, wonach soll ich mich beim Multiplizieren richten: nach den Regeln, oder nach der Multiplikation, die in den Rechenbüchern steht? wenn diese beiden nämlich nicht übereinstimmen. – Nun, es kommt tatsächlich nie vor, daß der, welcher rechnen gelernt hat, bei dieser Multiplikation hartnäckig etwas anderes herausbringt, als was in den Rechenbüchern steht. Sollte es aber geschehen; so würden wir ihn für abnorm erklären, & von seiner Rechnung weiter keine Notiz nehmen.

78[2] "Du gibst *das* zu – dann mußt Du *das* zugeben." – Er *muß* es zugeben – & dabei ist es möglich, daß er es nicht zugibt. – "Ich werde Dir zeigen, warum Du es zugeben mußt. –" Ich werde Dir einen Fall vor Augen führen, welcher, wenn Du ihn bedenkst, Dich bestimmen wird, so zu urteilen.

78[3] Wie können ihn denn die Manipulationen des Beweises dazu bringen, etwas zuzugeben?

78[4] & 79[1] “Du wirst doch zugeben, daß 5 aus 3 und 2 besteht!”

Ich will es nur zugeben, wenn ich damit nichts zugebe. Außer– daß ich *dieses Bild* verwenden will.

79[2] Man könnte z.B. die Figur

als Beweis dafür nehmen, daß 100 Parallelogramme, so zusammengesetzt, einen geraden Streifen geben müssen. Wenn man dann wirklich 100 zusammenfügt, erhält man nun etwa einen schwach gebogenen Streifen. – Jener Beweis aber hat uns bestimmt, das Bild & die Ausdrucksweise zu gebrauchen: Wenn sie keinen geraden Streifen geben, waren sie ungenau hergestellt.

79[3] Denke nur, wie kann mich das Bild, das Du mir zeigst (oder der Vorgang) dazu verpflichten, nun so & so immer zu urteilen! Ja, liegt hier ein Experiment vor, so ist *eines* ja doch zu wenig, mich zu irgend einem Urteil zu verbinden.

79[4] & 80[1] Der Beweisende sagt: “Schau diese Figur an! Was wollen wir dazu sagen? Nicht, daß ein Rechteck aus ... besteht? –” Oder auch: “Das nennst Du doch ‘Parallelogramme’ & das ‘Dreiecke’ & *so* sieht es doch aus, wenn eine Figur aus andern besteht. –”

80[2] & 81[1] “Ja, Du hast mich überzeugt: ein Rechteck besteht immer aus ...” – Würde ich auch sagen: “Ja Du hast mich überzeugt: *dies* Rechteck (das des Beweises) besteht aus ...”? Und dies wäre ja doch der bescheidenere Satz; den auch der zugeben sollte, der etwa den allgemeinen Satz (noch) nicht zugibt. Seltsamerweise aber scheint der, der *das* zugibt, nicht den bescheideneren geometrischen Satz zuzugeben, sondern gar keinen Satz der Geometrie. Freilich, – denn bezüglich des Rechtecks des Beweises hat er mich ja von nichts überzeugt. (Über diese Figur, wenn ich sie früher gesehen hätte, wäre ich ja in keinem Zweifel gewesen.) Ich habe aus freien Stücken, was diese Figur anbelangt, alles zugestanden. Und er hat mich nur *mittels* ihrer überzeugt. – Aber anderseits, wenn er mich nicht einmal bezüglich *dieses* Rechtecks von etwas überzeugt hat, wie dann erst von einer Eigenschaft andrer Rechtecke?

81[2] Wir halten geflissentlich an der *kindischen* Schwierigkeit fest.

81[3] Wer philosophiert, leidet unter einem Sprachkrampf. Es ist der sprachliche Übergang in die krampffreie Stellung zu suchen.

81[4] Wenn ich ein Rechteck als auf diese Weise zusammengefügt sehe, so vergleiche ich dies dem Vorgang: meine Blicke dringen in das Innere der Figur & sehen dort diese Zusammensetzung. Man kann ja auch sagen: “ich könnte es nicht zusammengesetzt sehen, wenn es nicht zusammengesetzt wäre.”

81[5] “Ich wußte nicht, daß diese Form aus diesen Formen besteht.” – So hat’s Dich das Bild gelehrt. Du hast etwas *Neues* gesehen – & willst sagen, Du habest gesehen, daß das Alte so & so zusammengesetzt ist.

81[6] & 82[1] “Ich habe nicht gewußt, daß die Rechtecksform aus diesen Formen besteht.” Es ist, als wäre die *Form* aus diesen *Formen* gemacht, geschweißt.

82[2] ‘Ja, die Form sieht nicht so aus, als könnte sie aus zwei windschiefen Teilen bestehen.’ Was überrascht Dich? Doch nicht, daß Du jetzt diese Figur vor Dir siehst! Mich überrascht etwas *in* dieser Figur. – Aber in dieser Figur geht ja nichts vor! Mich überrascht die Zusammenstellung des Schiefen mit dem Graden. Mir wird – gleichsam – schwindlig. Das ist vergleichbar damit, daß Einem schwindlig wird, der eine Spirale ansieht.

82[3] & 83[1] ‘Mich überrascht, daß die windschiefen Striche ein Gerades geben. (Ich hätte es nicht gedacht.)’ – Ja, das ist so, als hätte ich sie zusammengesetzt. Sie haben nicht ausgesehen als würden sie zu etwas Geradem zusammenpassen, ich hatte mir etwas Winkeliges erwartet. – Aber kann ich mir denn beim Anblick der geteilten Rechtecksfigur etwas Winkeliges erwarten?! –

Eher könnte ich sagen: “Es will mir nicht recht ein, daß diese Stücke das ergeben.” Das ist (aber) gleichsam ein Ausdruck des Schwindels.

83[2] Ich sage aber doch wirklich: "Ich habe mich überzeugt, daß man die Figur aus diesen Teilen legen kann", wenn ich nämlich etwa die Abbildung der Lösung des Geduldspiels gesehen habe. Wenn ich nun Einem das sage, so will ich doch sagen: "Versuch nur! Diese Stücke, richtig gelegt, geben wirklich die Figur." Ich will ihn aufmuntern etwas zu tun & sage ihm einen Erfolg voraus. Und die Vorhersage beruht auf der Leichtigkeit, mit der man die Figur aus den Stücken zusammensetzen kann, sobald man nur weiß *wie*.

83[3] [→] Du bist erstaunt über das, was Dir der Beweis zeigt. Aber bist Du erstaunt darüber, daß sich diese Striche ziehen lassen? Nein. Du bist erstaunt, nur wenn Du Dir sagst, daß zwei solche Stücke diese Form *geben*. Wenn Du Dich also in die Situation hineindenkst: Du habest Dir etwas anderes erwartet & nun sähest Du das Ergebnis.

84[1] "Aus *dem* folgt unerbittlich *das*." Ja, in dieser Demonstration geht es aus ihm hervor. Und eine Demonstration ist dies für den, der sie als Demonstration anerkennt. Wer sie *nicht* anerkennt, wer ihr nicht als Demonstration folgt, der trennt sich von uns eben, ehe es zur Sprache kommt.

84[2]

Hier haben wir etwas, was unerbittlich ausschaut. Und doch: 'unerbittlich' kann es nur in seinen Folgen sein! Denn sonst ist es nur ein Bild. Worin besteht denn die Fernwirkung – wie man's nennen könnte – dieses Diagramms?

84[3] & 85[1] Ich habe einen Beweis gelesen – nun bin ich überzeugt. – Wie, wenn ich diese Überzeugtheit sofort vergäße! Denn es ist ein eigentümliches Vorgehen, daß ich den Beweis *durchlaufe* & dann sein Ergebnis annehme. – Ich meine: so *machen* wir es eben. Das ist so bei uns der Brauch, oder eine Tatsache unserer Naturgeschichte.

85[2] 'Wenn ich *fünf* habe, so habe ich *drei*, und *zwei*.' – Aber woher weiß ich, daß ich fünf habe? – Nun, wenn es so

||||| ausschaut. –

Und ist es auch gewiß, daß, wenn es *so* ausschaut, ich es immer in *solche* Gruppen zerlegen kann? Es ist Tatsache, daß wir dies Spiel spielen können: Ich lehre Einem, wie eine Zweier-, Dreier-, Vierer-, Fünfergruppe aussieht, & ich lehre ihn Striche einander (etwa durch Striche) eins zu eins zuordnen; dann lasse ich ihn immer je zweimal den Befehl ausführen: "Zeichne eine Fünfergruppe" – & dann den Befehl: "Ordne die beiden Gruppen einander zu"; & es zeigt sich, daß er, so gut wie *immer*, die Striche restlos einander zuordnet. Oder auch: es ist Tatsache, daß ich bei der 1 → 1 Zuordnung dessen, was ich als Fünfergruppen hinzeichne, so gut wie nie in Schwierigkeiten komme.

85[3] & Ich soll das Geduldspiel zusammenlegen, ich versuche hin &
86[1] her, bin zweifelhaft, ob ich es zustande bringen werde. Nun zeigt mir jemand das Bild der Lösung: – nun sage ich – ohne irgend einen Zweifel – "jetzt kann ich's!" – Ist es denn *sicher*, daß ich es nun zusammenbringen werde? – Aber die Tatsache ist: ich zweifle nicht daran. Wenn nun jemand fragte: "Worin besteht die Fernwirkung jenes Bildes?" – Doch in seiner *Anwendung*, wo immer es sei.

86[2] & Ich sagte einmal es sei keine *Erfahrungstatsache*: daß die
86[3] & Tangente einer visuellen Kurve ein Stück mit dieser gemeinsam
87[1] & läuft; & wenn dies eine Figur zeige, so nicht als das Resultat
87[2] eines Experiments.

Man könnte auch sagen: Du siehst hier, daß Stücke einer kontinuierlichen visuellen Kurve gerade sind. – Aber sollte ich nicht sagen: – "Das nennst Du doch eine 'Kurve'. – Und nennst Du dieses Stückchen nun 'krumm' oder 'gerade'? – Das nennst Du doch eine 'Gerade', & sie enthält dieses Stück." Aber warum sollte man nicht für visuelle Strecken einer Kurve , die auch in einer Geraden liegen können ein *neues* Wort gebrauchen? "Das Experiment des Ziehens dieser Linien hat doch gezeigt, daß sie sich nicht in einem *Punkt* berühren." – Daß *sie* sich nicht in einem Punkt berühren? Wie sind '*sie*' definiert? Oder: kannst Du mir zeigen, wie es ist, wenn sie sich 'in einem Punkt berühren'? Denn warum soll ich nicht einfach sagen: das Experiment hat ergeben, daß sie – nämlich eine krumme & eine grade Linie – einander *berühren*? Denn ist dies *nicht*, was ich "Berührung" solcher Linien nenne?

87[3] & 88[1] Wie, wenn jemand sagte: "Die Erfahrung lehrt Dich, daß diese Linie

krumm ist"? – Da wäre zu sagen, daß hier die Worte "diese Linie", die auf dem Papier gezogene physikalische Linie bedeuten. Man kann ja tatsächlich den Versuch anstellen & diesen Strich verschiedenen Menschen zeigen & fragen: "Was siehst Du; eine gerade, oder eine krumme Linie?" – Wenn aber jemand sagte: "ich stelle mir jetzt eine krumme Linie vor", & wir ihm darauf sagen: "Da siehst Du also, daß diese Linie eine krumme ist" – was für einen Sinn hätte das?

88[2] Zeichnen wir einen Kreis aus schwarzen & weißen Stücken, die kleiner & kleiner werden.

"Welches dieser Stücke –von links nach rechts– erscheint Dir schon als gerade?" Dies ist ein Experiment. Nun kann man aber doch auch sagen: "Ich stelle mir einen Kreis vor aus schwarzen & weißen Stücken, eines ist groß, gekrümmt, die folgenden werden immer kleiner, das sechste ist schon gerade." Wo liegt hier das Experiment?

88[3] In der Vorstellung kann ich rechnen, aber nicht experimentieren.

88[4] & 89[1] *In* einer Demonstration *einigen* wir uns mit jemand. Einigen wir uns in ihr nicht, so trennen sich unsere Wege, ehe es zu einem Verkehr mittels dieser Sprache kommt. Es ist ja nicht wesentlich daß der Eine den Andern mit der Demonstration überzeuge. Es können ja beide sie sehen (lesen), & anerkennen.

89[2] & 90[1] “Du siehst doch – es kann doch keinem Zweifel unterliegen, daß eine Gruppe wie A wesentlich

aus einer wie B & einer wie C besteht!” – Ich sage auch – d.h., ich drücke mich auch so aus – daß die Gruppe, die Du hingezeichnet hast, aus den beiden kleineren besteht; aber ich weiß nicht, ob jede Gruppe, die ich eine von der Gestalt der ersten nennen würde, unbedingt aus zwei Gruppen von der Art jener kleineren zusammengesetzt sein wird. − − Ich glaube aber, es wird wohl immer so sein (meine Erfahrung hat mich dies vielleicht gelehrt) & darum will ich als Regel annehmen: Ich will eine Gruppe dann & nur dann eine von der Gestalt A nennen, wenn sie in zwei Gruppen wie B & C zerlegt werden kann.

90[2] Und so wirkt auch die Zeichnung als Beweis

“Ja wahrhaftig! zwei Parallelogramme stellen sich zu dieser Form zusammen!” (Das ist sehr ähnlich, wie wenn ich sagte: “Ja wirklich! eine Kurve kann aus graden Stücken bestehen.”) – Ich hätte es nicht gedacht. – Ja – nicht, daß die Teile dieser Figur oben diese Figur ergeben! Das heißt ja nichts. – Sondern ich erstaune nur, wenn ich denke, ich hätte das obere Parallelogramm (ahnungslos) auf das untere gestellt & sähe nun dieses Ergebnis.

90[3] Und man könnte sagen: der Beweis beweist eben das, was Dich überrascht.

90[4] & 91[1] Denn warum sage ich, jene Figur überzeugt mich von etwas, & nicht geradeso auch diese:

Sie zeigt doch auch, daß zwei solche Stücke ein Rechteck geben. “Aber das ist uninteressant”, will man sagen. Und warum ist es uninteressant?

91[2] Wenn man sagt: “Diese Form besteht aus diesen Formen” – so denkt man sich die Form als eine feine Zeichnung, ein feines Gestell von dieser Form, auf das gleichsam die Dinge gespannt sind, die diese Form haben. (Vergleiche: Platos Auffassung der Eigenschaft.)

91[3] Hiermit ist in Zusammenhang, daß ich oben schrieb: “… daß eine Gruppe *wesentlich* aus … besteht”. Wann besteht denn eine Gruppe ‘*wesentlich*’ aus …? Das hängt natürlich von der Art der Verwendung der *Bezeichnung* ab, die wir der Gruppe geben. Eine Hand hat zwar 5 Finger, aber ich hätte nicht gesagt: die Finger meiner Hand bestehen wesentlich aus 3 + 2 (Fingern). Nun, wesentlich ist es, ‘wenn es nicht anders sein kann’; & es kann nicht anders sein, wenn die Gruppe mit ihrer Teilung als Paradigma dienen soll. Der *wesentliche* Zug ist ein Zug der Darstellungsart.

92[1] Sieh den Satz an: “Wann besteht denn eine Gruppe ‘wesentlich’ aus …?” & viele andre, die ich immer wieder gebrauche. Er soll ja heißen: “Wann *sagen* wir denn: ‘eine Gruppe besteht wesentlich …’?” *So* wird also der grammatische Satz in nicht-grammatische Form gekleidet.

92[2] Was ist Dein Ziel in der Philosophie? – Ich zeige der Fliege den Ausweg aus dem Fliegenglas. Dieser Weg ist, in einem Sinne, *unmöglich* zu finden, & in einem andern Sinne, ganz leicht.

92[3] & 93[1] & 94[1] “Diese Form besteht aus diesen Formen. Du hast mir eine wesentliche Eigenschaft dieser Form gezeigt.” – Du hast mir ein neues *Bild* gezeigt. Es ist als hätte *Gott* sie so zusammengesetzt. – *Wir bedienen uns also eines Gleichnisses*. Die *Form* wird zum ätherischen Wesen, welches diese Form hat; es ist als wäre sie ein für allemal so zusammengesetzt worden (von dem, der die wesentlichen Eigenschaften in die Dinge gelegt hat.) Denn machen wir die Form zum Ding das aus Teilen besteht, so ist (also) der Werkmeister der Form der, der auch Licht & Dunkelheit, Farbe & Härte, etc., geschaffen hat. (Denke, jemand fragte: “Die Form … ist aus diesen Teilen zusammengesetzt; wer hat sie zusammengesetzt? Du?”) Man hat das Wort “Sein” für eine sublimierte, ätherische Art von Existenz gebraucht. Betrachte nun den Satz: “Rot *ist*” (z.B.). Freilich, niemand gebraucht ihn je. Wenn ich mir aber doch einen Gebrauch für ihn erfinden sollte, so wäre es, als einleitende Formel zu Aussagen, die dann von dem Wort “rot”, z.B., Gebrauch machen sollen; beim Aussprechen der Formel blicke ich auf ein Muster der Farbe Rot. Einen Satz, wie “Rot *ist*.” ist man versucht zu sagen, wenn man die Farbe mit Aufmerksamkeit betrachtet: also in der gleichen *Situation*, in welcher man die Existenz eines Ding’s feststellt (eines blattähnlichen Käfers z.B.). Und ich will sagen: wenn man den Ausdruck gebraucht, “der Beweis hat mich gelehrt – hat mich davon überzeugt – daß es sich so verhält”, (so) ist man noch immer in jenem Gleichnis.

94[2] Ich hätte auch sagen können: Wesentlich ist nie die Eigenschaft des Gegenstandes, sondern das Merkmal des Begriffes.

94[3] 'Ist die *Gestalt* der Gruppe dieselbe; so *muß* sie sich *so* teilen lassen. Denn das gehört zur Gestalt.'

94[4] Wir sind immer zu sehr geneigt, von den seltsamsten, nie dagewesenen, Vorgängen zu reden, statt bloß von alltäglichen, allbekannten. Ein gewisser behaviourism ist darum unschätzbar, weil er uns lehrt, an das zu denken, was wir kennen, womit wir vertraut sind, statt an Fiktionen, die uns unsere Sprache nahelegt. (Ähnlich: *Zeit* & *Uhr*.) Wir werden aber durch unsere Spekulationen gegen unsern Willen zum Ausgefallenen, Seltsamen geführt & es bedarf immer wieder eines Entschlusses & einer Anstrengung, zum Wohlbekannten zurückzukehren.

95[1] "Das ist mir nie aufgefallen", – obwohl ich es hundertmal gesehen habe. – Der Zweck eines Experiments ist es nicht, Dich *aufmerksam zu machen* auf das, was Du schon längst wußtest.

95[2] Warum wirken die philosophischen Fragen so *beunruhigend*? Oder soll ich sagen: Die philosophischen Fragen entspringen einer (gewissen) Irritation, denn der Denkkrampf ist eben von Irritation begleitet. (Ähnlichkeit mit dem Nägelbeißen.) Man kann sagen: Der Philosophierende muß immer wieder trachten zur Ruhe zu kommen.

95[3] & 96[1] "War die Gestalt der Gruppe dieselbe, so muß sie dieselben Aspekte, Möglichkeiten der Teilung, haben. Hat sie andere (Aspekte), so ist es nicht die gleiche Gestalt; sie hat Dir dann vielleicht irgendwie den gleichen Eindruck gemacht; aber *dieselbe Gestalt* ist sie nur, wenn Du sie auf gleiche Weise zerteilen kannst."

Es ist doch als würde dies das Wesen der Gestalt aussprechen. – Aber ich sage doch: Wer über das *Wesen* spricht –, konstatiert bloß eine Übereinkunft. Und da möchte man doch entgegnen: es gibt doch nichts Verschiedeneres, als ein Satz über die Tiefe des Wesens & einer – über eine bloße Übereinkunft. Wie aber, wenn ich antworte: der *Tiefe* des Wesens entspricht das *tiefe* Bedürfnis nach dieser Übereinkunft. Wenn ich also sage: "es ist als spräche dieser Satz das *Wesen* der Gestalt aus", so meine ich: es ist doch, als spräche dieser Satz eine Eigenschaft des – Wesens *Gestalt* aus! – Und man kann sagen: Das Wesen, von dem er eine Eigenschaft aussagt, & das ich hier das Wesen 'Gestalt' nenne, ist das Bild, das mir mit dem Wort "Gestalt" untrennbar verbunden erscheint.

96[2] & 97[1] Wie *lernen* wir denn Schließen? Oder lernen wir es nicht –? Weiß das Kind, daß aus der doppelten Verneinung die Bejahung folgt? – Und wie *überzeugt* man es davon? Wohl dadurch, daß man ihm einen Vorgang zeigt (eine doppelte Umkehrung, zweimalige Drehung um 180°, u. dergl.) den es nun als Bild der Verneinung annimmt. Und man macht den Sinn von "(x).fx" klar, indem man darauf dringt, daß aus ihm "fa" folgt.

97[2] Ist ein Experiment, in welchem wir die Beschleunigung beim freien Fall beobachten, ein physikalisches Experiment, oder ist es ein psychologisches, das zeigt, was Menschen, unter solchen Umständen, sehen? – Kann es nicht beides sein? Hängt das nicht von seiner *Umgebung* ab: von dem, was wir damit machen, darüber sagen? Könnte man nicht sagen: ein bestimmtes Experiment ist etwas erst im Raum einer Theorie?

RFM II 97[3] & 98[1] —

Ansätze

In wiefern beweist die Diagonalmethode, daß es eine Zahl gibt die – sagen wir – keine Quadratwurzel ist? –

Es ist natürlich äußerst leicht zu zeigen ‘daß es Zahlen gibt die keine Quadratwurzeln sind’ – aber wie zeigt es *diese* Methode?

[*Ansätze*]

Haben wir denn einen allgemeinen Begriff davon, was es heißt: zeigen daß es eine Zahl gibt die keine dieser unendlichen Menge ist? Denken wir, jemand hätte diese Aufgabe erhalten eine Zahl zu nennen die von allen $\sqrt[2]{n}$ verschieden ist; er hätte aber vom Diagonalverfahren nichts gewußt & hätte die Zahl $\sqrt[3]{2}$ als Lösung genannt; & gezeigt daß sie keine $\sqrt[2]{n}$ ist. – Oder er hätte gesagt: nimm die $\sqrt{2}$ = 1˙4142 … & subtrahiere 1 von der ersten Dezimale, im übrigen aber sollen die Stellen mit $\sqrt{2}$ übereinstimmen 1˙3142 … kann keine $\sqrt{n}$ sein.

RFM II 98[2] “Nenne mir eine Zahl die mit $\sqrt{2}$ an jeder zweiten Dezimalstelle übereinstimmt!” Was fordert diese Aufgabe? – Die Frage ist: ist sie befriedigt durch die Antwort: Es ist die Zahl die man nach der Regel erhält: entwickle $\sqrt{2}$ & addiere 1 oder − 1 zu jeder zweiten Dezimalstelle? Es ist ebenso wie die Aufgabe: Teile einen Winkel in 3 Teile dadurch als gelöst betrachtet werden kann, daß man 3 gleiche Winkel an einander legt.

RFM II [*Ansätze*]

99[1] Wenn einem auf die Aufforderung: “Zeige mir eine Zahl die von allen diesen verschieden ist”, die Diagonalregel zur Antwort gegeben wird, warum soll er nicht sagen: “Aber so hab ich’s ja nicht gemeint!”? Was Du mir gegeben hast ist eine Regel Zahlen sukzessive herzustellen, die von jeder von diesen nach der Reihe verschieden sind. “Aber warum willst Du das nicht auch eine Methode nennen, eine Zahl zu kalkulieren?” – Aber was ist hier die Methode des Kalkulierens & was das Kalkulierte? Du wirst sagen sie seien *eins*, denn man kann nun z.B. sagen: die Zahl D ist größer als … & kleiner als …; man kann sie quadrieren etc. etc.. Ist die Frage nicht eigentlich: Wozu kann man diese Zahl *brauchen*. Ja, das klingt sonderbar. – Aber es heißt eben in welcher mathematischen Umgebung steht sie.

RFM II 99[3] & 100[1] [*Ansätze*]

Ich vergleiche also Methoden des Kalkulierens. – Aber da gibt es ja sehr verschiedene Methoden des Vergleichens. Ich soll aber in irgend einem Sinne die *Resultate* der Methoden mit einander vergleichen. Aber da wird schon alles unklar, denn in *einem* Sinne haben sie nicht jede *ein* Resultat, oder es ist nicht von vornherein klar was hier in jedem Falle als *das* Resultat zu betrachten ist. Ich will sagen es ist hier jede Gelegenheit gegeben die Bedeutungen zu drehen & zu wenden. –

RFM II 100[2] Sagen wir einmal – nicht: “Die Methode gibt ein Resultat”, sondern: “sie gibt eine unendliche Reihe von Resultaten”. Wie vergleiche ich unendliche Reihen von Resultaten? Ja, da gibt es sehr Verschiedenes, was ich so nennen kann.

RFM II 100[3] Es heißt hier immer: Blicke *weiter* um Dich!

RFM II 100[4] & 101[1] [*Ansätze*]

Das Resultat einer Kalkulation in der Wortsprache ausgedrückt ist mit Mißtrauen zu betrachten. Die *Rechnung* beleuchtet die Bedeutung des Wortausdrucks. Sie ist das *feinere* Instrument zur Bestimmung der Bedeutung. Willst Du wissen was der Wortausdruck bedeutet, so schau auf die Rechnung; nicht umgekehrt. Der Wortausdruck wirft nur einen matten allgemeinen Schein auf die Rechnung; die Rechnung aber ein grelles Licht auf den Wortausdruck. (Als wolltest Du die Höhen zweier Berge nicht durch Höhenmessung vergleichen sondern durch ihr scheinbares Verhältnis wenn man sie von unten anschaut.)

RFM II 101[2] 'Ich will Dich eine Methode lehren wie Du in einer Entwicklung allen diesen Entwicklungen nach der Reihe *ausweichen* kannst.' So eine Methode ist das Diagonalverfahren. – "Also erzeugt sie eine Reihe, die von allen diesen verschieden ist." Ist das richtig? – Ja; wenn Du nämlich diese Worte auf diesen, oben beschriebenen Fall anwenden willst.

RFM II 101[3] & 102[1] [*Ansätze*]

Wie wäre es mit dieser Konstruktionsmethode: Die Diagonalzahl wird durch Addition oder Subtraktion von 1 erzeugt, aber ob zu addieren oder zu subtrahieren ist erfährt man erst, wenn man die ursprüngliche Reihe um mehrere Stellen fortgesetzt hat. Wie wenn man nun sagte: die Entwicklung der Diagonalreihe holt die Entwicklung der andern Reihen nie ein; – gewiß die Diagonalreihe weicht jeder der Reihen aus wenn sie sie trifft, aber das nützt ihr nichts da die Entwicklung der andern Reihen ihr wieder voraus ist. Ich kann hier doch sagen: es gibt *immer* eine der Reihen für die nicht bestimmt ist ob sie von der Diagonalreihe verschieden ist oder nicht. Man kann sagen: sie laufen einander ins Unendliche nach aber immer die ursprüngliche Reihe voran. “Aber Deine Regel reicht doch schon in’s Unendliche, also weißt Du doch schon genau daß die Diagonal-Reihe von jeder andern verschieden sein wird!”– – –

RFM II 102[2] & 103[1] [*Ansätze*]

Es heißt nichts zu sagen: “*Also* sind die X-Zahlen nicht abzählbar”. Man könnte etwa sagen: Den Zahlbegriff X nenne ich unabzählbar, wenn festgesetzt ist, daß, welche der unter ihn fallenden Zahlen immer Du in eine Reihe bringst die Diagonalzahl dieser Reihe auch unter ihn fällt.

RFM II 103[2] & 103[3] & 104[1] [*Ansätze*]

Da meine Zeichnung ja doch nur die *Andeutung* der Unendlichkeit ist, warum muß ich so zeichnen:

& nicht so:

Hier haben wir eben verschiedene Bilder; & ihnen entsprechen verschiedene Redeweisen. Aber kommt denn dabei etwas Nützliches heraus, wenn wir über *ihre* Berechtigung streiten? Das Wichtige muß doch woanders liegen; wenn auch diese Bilder unsre *Phantasie* am stärksten erhitzen.

RFM II Wozu läßt sich der Begriff 'unabzählbar' verwenden?
104[2]

RFM II Man könnte doch sagen– wenn Einer tagaus tagein versuchte
104[3] 'alle Irrationalzahlen in eine Reihe zu bringen': "Laß das! es heißt nichts; siehst Du nicht: wenn Du eine Reihe aufgestellt hättest, so käme ich Dir mit der Diagonalreihe!" Das könnte ihn von seiner Beschäftigung abbringen. Nun, das wäre ein Nutzen. Und mir kommt vor das wäre auch der ganze & eigentliche Zweck dieser Methode. Sie bedient sich des vagen Begriffes dieses Menschen, der gleichsam idiotisch drauflos arbeitet & bringt ihn durch ein Bild zur Ruhe. (Man könnte ihn aber durch ein andres Bild auch wieder zur Weiterführung seines Unternehmens bringen.)

RFM II Die Methode führt etwas vor, – was man auf sehr vage Weise
105[1] die Demonstration davon nennen kann, daß sich *diese* Rechnungsmethoden nicht in eine Reihe ordnen lassen. Und die Bedeutung des "*diese*" ist hier eben vag gehalten.

RFM II Ein gescheiter Mann hat sich in diesem Sprachnetz gefangen:
105[2] Also muß es ein interessantes Sprachnetz sein.

RFM II 105[3] & 106[1] & 107[1]

Der Fehler beginnt damit daß man sagt die Kardinalzahlen ließen sich in eine Reihe ordnen. Welchen Begriff hat man denn von diesem Ordnen? Ja man hat natürlich einen von einer endlichen Reihe, aber das gibt uns ja hier höchstens eine vage Idee einen Leitstern für die Bildung eines Begriffs.) Der Begriff selbst ist ja von dieser & einigen andern Reihen *abstrahiert*; oder: der Ausdruck bezeichnet eine gewisse Analogie von Fällen & man kann ihn etwa dazu benützen um ein Gebiet, von dem man reden will vorläufig abzugrenzen. Damit ist aber nicht gesagt, daß die Frage einen klaren Sinn hat: "Ist die Menge R. in eine Reihe zu ordnen?" Denn diese Frage bedeutet nun etwa: Kann man mit diesen Gebilden etwas tun was dem Ordnen der Kardinalzahlen in eine Reihe entspricht. Wenn man also fragt: "Kann man die Reellen Zahlen in eine Reihe ordnen?" So könnte die gewissenhafte Antwort sein: "Ich kann mir vorläufig gar nichts Genaues darunter vorstellen". – "Aber Du kannst doch z.B. die Wurzeln & die algebraischen Zahlen in eine Reihe ordnen; also verstehst Du doch den Ausdruck!" – Richtiger gesagt ich *habe* hier gewisse analoge Gebilde, die ich mit dem gemeinsamen Namen "Reihen" benenne. Aber ich habe noch keine sichere Brücke von diesen Fällen zu dem 'aller reellen Zahlen'. Ich habe auch keine allgemeine Methode um zu versuchen ob sich die oder die Menge 'in eine Reihe ordnen läßt'. Nun zeigt man mir das Diagonalverfahren & sagt: "hier hast Du nun den Beweis, daß dieses Ordnen hier nicht geht". Aber ich kann antworten: "Ich weiß – wie gesagt – nicht, was es ist, was hier *nicht geht*." Wohl aber sehe ich: Du willst einen Unterschied zeigen in der Verwendung von "Wurzel", "algebraische Zahl", etc. einerseits & "reelle Zahl" anderseits.

Und zwar etwa so: Die Wurzeln nennen wir "reelle Zahlen" & die Diagonalzahl, die aus den Wurzeln gebildet ist *auch*. Und ähnlich mit allen Reihen reeller Zahlen. Daher hat es keinen Sinn von einer "Reihe *aller* reellen Zahlen" zu reden, weil man ja auch die Diagonalzahl der Reihe eine "reelle Zahl" nennt. – Wäre das nicht etwas ähnlich, wie wenn man gewöhnlich jede Reihe von Büchern selbst ein Buch nennte & nun sagte: "Es hat keinen Sinn von 'der Reihe aller Bücher' zu reden, da jede Reihe selbst ein Buch ist."

RFM II 107[2] & 108[1] Es ist hier sehr nützlich sich vorzustellen, daß das Diagonalverfahren zur Erzeugung einer reellen Zahl längst vor der Erfindung der Mengenlehre bekannt & auch den Schulkindern geläufig gewesen wäre, wie es ja sehr wohl hätte sein können. So wird nämlich der Aspekt der Entdeckung Cantors geändert. Diese Entdeckung hätte sehr wohl *bloß* in der Interpretation dieser altbekannten, elementaren Rechnung liegen können.

RFM II 108[2] Die Rechnung selbst ist ja nützlich. Die Aufgabe wäre etwa: Schreibe eine Dezimalzahl an die verschieden ist von den Zahlen:

$0 \cdot 1 2 4 6 7 9 8 0 \cdot 3 4 6 9 8 7 6 0 \cdot 0 1 2 7 6 4 9 0 \cdot 3 4 2 6 7 9 4 \cdots$
$\cdots\cdot$

Man denke sich eine lange Reihe.

Das Kind denkt sich: Wie soll ich das machen ich müßte ja auf alle die Zahlen zugleich schauen um zu vermeiden daß ich nicht doch eine von ihnen anschreibe. Die Methode sagt nun:

durchaus nicht; ändere die erste Stelle der ersten Zahl, die zweite der zweiten, etc. etc. & Du bist sicher eine Zahl hingeschrieben zu haben, die mit keiner der gegebenen übereinstimmt. Die Zahl die man so erhält könnte immer die Diagonalzahl genannt werden.

RFM II 108[3] & 109[1] Das Gefährliche, Täuschende, der Fassung "Man kann die reellen Zahlen nicht in eine Reihe ordnen" oder gar "Die Menge ... ist nicht abzählbar" liegt darin, daß sie das was eine Begriffsbestimmung Begriffsbildung ist als eine Naturtatsache erscheinen lassen.

RFM II 109[2] Bescheiden heißt der Satz: "Wenn man etwas eine Reihe reeller Zahlen nennt, so heißt die Entwicklung des Diagonalverfahrens auch eine 'reelle Zahl' & zwar eine die 'von allen Gliedern der Reihe verschieden' sei.

RFM II 109[3] Unser Verdacht sollte immer rege sein, wenn ein Beweis mehr beweist, als seine Mittel ihm erlauben. Man könnte so etwas einen 'prahlerischen Beweis' nennen.

RFM II 109[4] & 110[1] Der gebräuchliche Ausdruck fingiert einen Vorgang eine Methode des Ordnens die hier zwar anwendbar ist aber nicht zum Ziele führt wegen der Zahl der Gegenstände die größer ist als selbst die der Kardinalzahlen. Wenn gesagt würde: “Die Überlegung über das Diagonalverfahren zeigt Euch, daß der *Begriff* ‘reelle Zahl’ viel weniger Analogie mit dem Begriff Kardinalzahl hat, als man, durch gewisse Analogien verführt, zu glauben geneigt ist” so hätte das einen guten & ehrlichen Sinn. Es geschieht aber gerade das *Gegenteil*: indem die ‘Menge’ der reellen Zahlen angeblich der Größe nach mit der der Kardinalzahlen verglichen wird. Die Artverschiedenheit der beiden Konzeptionen wird durch eine schiefe Ausdrucksweise als Verschiedenheit der Ausdehnung dargestellt. Ich glaube & hoffe eine künftige Generation wird über diesen Hokus Pokus lachen.

110[2] & 111[1] & 112[1] & 113[1] & 114[1] 27.06.1938

Vorwort.

In dem Folgenden will ich eine Auswahl der philosophischen Bemerkungen veröffentlichen, die ich im Laufe der letzten 10 Jahre niedergeschrieben habe. Sie betreffen (sehr) verschiedene Gebiete der philosophischen Spekulation: den Begriff der Bedeutung, des Verstehens, des Satzes, der Logik, die Grundlagen der Mathematik, die Sinneserfahrung, den Gegensatz zwischen Idealismus & Realismus, und anderes. Alle diese Gedanken habe ich ursprünglich als *Bemerkungen*, kurze Absätze, niedergeschrieben. Manchmal in längeren Ketten über einen & denselben Gegenstand, manchmal in raschem Wechsel, von einem Gebiet auf's andere überspringend. – Meine Absicht war es, dies alles einmal in einem Buche zusammenzufassen; von dessen Form ich mir zu verschiedenen Zeiten verschiedene Vorstellungen machte. Wesentlich (aber) war, daß der Gedanke darin alle (die) behandelten Gegenstände in einer wohlgeordneten Reihe durchlaufen sollte. Vor etwa 4 Jahren machte ich den ersten Versuch so einer Zusammenfassung. Das Ergebnis war unbefriedigend & ich machte weitere Versuche; – – bis ich endlich, nach weiteren 2 Jahren zur Überzeugung gelangte, daß es vergebens Mühe sei, & daß ich alle solche Versuche aufzugeben habe. Es zeigte sich mir, daß das Beste was ich schreiben konnte, immer nur philosophische Bemerkungen bleiben würden; daß meine Gedanken bald erlahmten, wenn ich versuchte, sie, gegen ihre natürliche Neigung, einem Geleise entlang laufen zu lassen. – Dies hing freilich auch mit der Natur des Gegenstands zusammen; der erfordert, daß man das Gedankengebiet (in die) kreuz & quer, nach allen Richtungen hin durchreise – (so) daß die einzelnen Gedanken zu einander in einem äußerst komplizierten Netz von Beziehungen zu einander stehen. Ich beginne diese Veröffentlichungen mit dem Fragment meines letzten Versuches meine philosophischen Gedanken in eine Reihe zu ordnen. Dies Fragment hat vielleicht den Vorzug, verhältnismäßig leicht einen Begriff von meiner Methode vermitteln zu können. Dem Fragment will ich eine Masse von Bemerkungen in mehr oder weniger losem Zusammenhang folgen lassen. Die Zusammenhänge dieser Bemerkungen aber, dort wo ihre Anordnung sie nicht kenntlich macht, will ich (dem Leser) durch eine Numerierung erklären: Jede Bemerkung soll eine laufende Nummer & außerdem die Nummern (solcher) Bemerkungen tragen die zu ihr in wichtigen Beziehungen stehen. Ich wollte, alle diese Bemerkungen wären besser, als sie sind. – Es fehlt ihnen im allgemeinen an Kraft & an Präzision. Ich veröffentliche (nur) diejenigen hier, die mir nicht zu öde erscheinen. Ich hatte, bis vor kurzem, den Gedanken an ihre Veröffentlichung bei meinen Lebzeiten eigentlich aufgegeben. Er wurde aber wieder rege gemacht, & zwar vielleicht hauptsächlich dadurch, daß ich erfahren mußte, daß die Resultate meiner Arbeit, die ich in Vorlesungen & Diskussionen mündlich weitergegeben hatte, vielfach mißverstanden, & mehr oder weniger verwässert & verstümmelt, im Umlauf waren. Hierdurch wurde meine Eitelkeit aufgeregt & sie drohte, mir immer wieder die Ruhe zu rauben, wenn ich die Sache nicht – wenigstens für mich – durch eine Publikation erledigte; & die schien auch in mancher anderen Beziehung das Wünschenswerteste.

114[2] & 115[1] Aus *verschiedenen* Gründen werden sich meine Gedanken mit dem berühren, was Andre heute schreiben. Tragen meine Bemerkungen keinen Stempel an sich, der sie als die meinen kennzeichnet, so will ich sie (auch) weiter nicht als mein Eigentum beanspruchen. Ich habe, seit ich mich vor 10 Jahren wieder mit Philosophie zu beschäftigen anfing, schwere Irrtümer in *dem* einsehen müssen, was ich seinerzeit in der 'Log. Phil. Abh.' niedergelegt hatte. Diese Irrtümer einzusehen, hat mir – in einem Maße, das ich kaum selbst beurteilen kann – die Kritik geholfen, die meine Ideen durch Frank Ramsey erfuhren, mit welchem ich sie in den letzten zwei Jahren seines Lebens in unzähligen Diskussionen erörterte. Noch mehr aber als dieser (äußerst) sicheren Kritik verdanke ich derjenigen, die Piero Sraffa Professor der Nationalökonomie an meinen Gedanken geübt hat.. Ohne *diesen* Ansporn hätte ich zu der folgereichsten Idee dieser Untersuchungen wohl nie gelangen können. Ich übergebe diese nicht ohne zweifelhafte Gefühle der Öffentlichkeit. Ich wage nicht, zu hoffen, daß, (in unserm *dunkeln* Zeitalter,) meine Arbeit im Stande sein sollte Lichtstrahlen in ein oder das andere Gehirn zu werfen. Mein Zweck ist es nicht jemandem das Denken zu ersparen; ich möchte vielmehr, wenn es möglich wäre, jemand zum Denken eigener Gedanken anregen. Gewidmet sind diese Schriften eigentlich meinen Freunden. Wenn ich sie ihnen nicht förmlich widme, so ist es darum, weil die meisten von ihnen sie nicht lesen werden.

116[1] *Meinen Freunden gewidmet.*

Vorwort.

116[2] & In dem Folgenden will ich eine Auswahl der philosophischen
117[1] & Bemerkungen veröffentlichen, die ich im Laufe der letzten 10
118[1] & Jahre niedergeschrieben habe. Sie betreffen eine Menge von
119[1] Gebieten: den Begriff der Bedeutung, des Verstehens, des Satzes, der Logik, die Grundlagen der Mathematik, die Sinnesdaten, den Gegensatz zwischen Idealismus & Realismus, & anderes. Alle diese Gedanken habe ich ursprünglich als *Bemerkungen*, kurze Absätze, niedergeschrieben. Manchmal in längeren Ketten über ein & denselben Gegenstand, manchmal, in raschem Wechsel, von einem (Gebiet) zum andern überspringend. – Meine Absicht war (es), dies alles einmal in einem Buche zusammenzufassen; von dessen Form ich mir zu verschiedenen Zeiten verschiedene Vorstellungen machte. Wesentlich aber war es immer, daß der Gedanke darin alle die behandelten Gegenstände in einer wohlgeordneten Reihe durchlaufen sollte Vor etwa 4 Jahren machte ich den ersten Versuch so einer Zusammenfassung. Das Ergebnis war ein unbefriedigendes; & ich machte weitere Versuche. – Bis ich endlich, nach etwa 2 Jahren, zur Überzeugung gelangte, daß es vergebens sei – & ich alle solche Versuche aufzugeben hätte. Es zeigte sich mir, daß das Beste, was ich schreiben konnte, immer nur philosophische Bemerkungen bleiben würden; daß meine Gedanken bald erlahmten, wenn ich versuchte, sie, gegen ihre natürliche Neigung, in *einem* Geleise festzuhalten. – Dies hing freilich auch mit der Natur des Gegenstands selbst zusammen. Er zwingt, das Gedankengebiet kreuz & quer, nach allen Richtungen hin zu durchreisen – daß die einzelnen Gedanken in einem verwickelten Netze von Beziehungen zu einander stehen. Ich beginne diese Veröffentlichungen mit dem

Fragment meines letzten Versuchs, meine philosophischen Gedanken in eine Reihe zu ordnen. Dies Fragment hat vielleicht den Vorzug, verhältnismäßig leicht einen Begriff von meiner Methode vermitteln zu können. Diesem Fragment will ich eine Masse von Bemerkungen in mehr oder weniger losem Zusammenhang folgen lassen. Die Zusammenhänge meiner Bemerkungen aber, dort wo ihre Anordnung sie nicht kenntlich macht, will ich durch eine Numerierung erklären: Jede Bemerkung soll eine laufende Nummer, & außerdem die Nummern derjenigen Bemerkungen tragen, die zu ihr in wichtigen Beziehungen stehen. Ich wollte, alle diese Bemerkungen wären besser, als sie sind. – Es fehlt ihnen – um es kurz zu sagen – an Kraft & an Präzision. Ich veröffentliche diejenigen hier, die mir nicht zu öde erscheinen. Ich hatte, bis vor kurzem, den Gedanken an ihre Veröffentlichung bei meinen Lebzeiten eigentlich aufgegeben. Er wurde aber wieder rege gemacht, & zwar vielleicht hauptsächlich dadurch, daß ich erfahren mußte, daß die Resultate meiner Arbeit, die ich in Vorlesungen & Diskussionen mündlich weitergegeben hatte, vielfach mißverstanden & mehr oder weniger verwässert & verstümmelt im Umlauf waren. – Hierdurch wurde meine Eitelkeit aufgeregt & sie drohte, mir immer wieder die Ruhe zu rauben, wenn ich die Sache nicht – wenigstens für mich – durch eine Publikation erledigte. Und dies schien auch in mancher andern Beziehung das Wünschenswerteste. Aus *verschiedenen* Gründen wird, was ich hier veröffentliche, sich mit dem berühren, was Andere heute schreiben. Tragen meine Bemerkungen keinen Stempel an sich, der sie als die meinen kennzeichnet, – so will ich sie auch weiter nicht als mein Eigentum beanspruchen.

119[2] & 120[1] Ich habe, seit ich vor 10 Jahren wieder mich mit Philosophie zu beschäftigen anfing, schwere Irrtümer in *dem* einsehen müssen, was ich seinerzeit in der ‘Logisch-Philosophischen Abhandlung’ niedergelegt hatte. Diese Irrtümer einzusehen, hat mir – in einem Maße, das ich kaum selbst beurteilen kann – die Kritik geholfen, die meine Ideen durch Frank Ramsey erfahren haben; mit welchem ich sie, in den letzten zwei Jahren seines Lebens, in zahllosen Diskussionen erörterte. – Noch mehr verdanke ich der Kritik, die Herr Piero Sraffa, Lehrer der Nationalökonomie in Cambridge, an meinen Gedanken geübt hat. *Diesem* Ansporn schulde ich die folgereichsten der hier mitgeteilten Gedanken. Ich übergebe diese nicht ohne zweifelhafte Gefühle der Öffentlichkeit. Ich wage nicht, zu hoffen, daß es (in unserm dunkeln Zeitalter) dieser dürftigen Arbeit beschieden sein sollte, Licht in das eine oder andere Gehirn zu werfen. Ich möchte nicht mit meiner Schrift Andern das Denken ersparen; sondern, wenn es möglich wäre, jemand zu eigenen Gedanken anregen.

120[2] & *Vorwort:*

121[1] &

122[1] & In dem Folgenden will ich eine Auswahl der philosophischen
123[1] & Bemerkungen veröffentlichen, die ich im Laufe der letzten 9
124[1] & Jahre niedergeschrieben habe. Sie betreffen viele Gebiete der
125[1] & philosophischen Spekulation: den Begriff der Bedeutung, des
126[1] & Verstehens, des Satzes, der Logik, die Grundlagen der
126[2] Mathematik, die Sinnesdaten, den Gegensatz zwischen

Idealismus & Realismus & anderes. Ich habe meine Gedanken ursprünglich als *Bemerkungen*, kurze Absätze, niedergeschrieben. Manchmal in längeren Ketten über denselben Gegenstand, manchmal sprungweise das Gebiet wechselnd. – Meine Absicht aber war, alles dies einmal in einem Buche zusammenzufassen, – von dessen Form ich mir zu verschiedenen Zeiten verschiedene Vorstellungen machte. Wesentlich jedoch schien es (mir), daß die Gedanken darin von einem Gegenstand zum andern in einer wohlgeordneten Reihe fortschreiten sollten. Vor etwa 4 Jahren machte ich den ersten Versuch so einer Zusammenfassung. Das Ergebnis war ein unbefriedigendes, & ich machte weitere Versuche. Bis ich endlich (einige Jahre später) zur Überzeugung gelangte, daß es vergebens sei; & ich alle solche Versuche aufzugeben hätte. Es zeigte sich mir, daß das Beste, was ich schreiben konnte, immer nur philosophische Bemerkungen bleiben würden; daß meine Gedanken bald erlahmten, wenn ich versuchte, sie, gegen ihre natürliche Neigung, *einem* Gleise entlang weiterzuzwingen. Dies hing allerdings auch mit der Natur des Gegenstands selbst zusammen. Dieser Gegenstand zwingt uns, das Gedankengebiet kreuz & quer, nach allen Richtungen hin zu durchreisen (daß die Gedanken also in einem verwickelten Netz von Beziehungen zu einander stehen). Ich beginne diese Veröffentlichung mit dem Fragment meines letzten Versuchs, meine philosophischen Gedanken in eine Reihe zu ordnen. Dies Fragment hat vielleicht den Vorzug, verhältnismäßig leicht einen Begriff von meiner Methode vermitteln zu können. Diesem Fragment will ich eine Masse von Bemerkungen in mehr oder weniger loser Anordnung folgen lassen. Die

Zusammenhänge der Bemerkungen aber, dort wo ihre Anordnung sie nicht erkennen läßt, will ich durch eine Numerierung erklären. Jede Bemerkung soll eine laufende Nummer & außerdem die Nummern solcher Bemerkungen tragen, die zu ihr in wichtigen Beziehungen stehen. Ich wollte, alle diese Bemerkungen wären besser, als sie sind. – Es fehlt ihnen – um es kurz zu sagen – an Kraft & an Präzision. Ich veröffentliche diejenigen hier, die mir nicht zu öde erscheinen. Ich hatte, bis vor kurzem, den Gedanken an ihre Veröffentlichung bei meinen Lebzeiten eigentlich aufgegeben. Er wurde aber wieder rege gemacht, & zwar vielleicht hauptsächlich dadurch, daß ich erfahren mußte, daß die Resultate meiner Arbeit, die ich in Vorlesungen & Diskussionen mündlich weitergegeben hatte, vielfach mißverstanden & mehr oder weniger verwässert, oder verstümmelt im Umlauf waren. – Hierdurch wurde meine Eitelkeit aufgeregt & sie drohte, mir immer wieder die Ruhe zu rauben, wenn ich die Sache nicht (wenigstens für mich) durch eine Publikation erledigte. Und dies schien auch in anderer Beziehung das Wünschenswerteste. Aus *verschiedenen* Gründen wird, was ich hier veröffentliche sich mit dem berühren, was Andere heute schreiben. Tragen meine Bemerkungen keinen Stempel an sich, der sie als die meinen kennzeichnet, so will ich sie auch weiter nicht als mein Eigentum beanspruchen. Ich habe, seit ich vor 10 Jahren wieder mich mit Philosophie zu beschäftigen anfing, schwere Irrtümer in *dem* einsehen müssen, was ich seinerzeit in der 'Logisch-Philosophischen Abhandlung' niedergelegt hatte. Diese Irrtümer einzusehen, dazu hat mir – in einem Maße, das ich kaum selbst zu beurteilen vermag – die Kritik geholfen, die meine Ideen durch Frank Ramsey erfahren haben; mit welchem ich sie, während der zwei letzten Jahre seines Lebens, in zahllosen Diskussionen erörtert habe. – Mehr noch als dieser, stets kraftvollen & sichern, Kritik verdanke ich derjenigen, die P. Sraffa (ein Lehrer der Nationalökonomie in Cambridge) unablässig an meinen Gedanken geübt hat. *Diesem* Ansporn schulde ich die folgereichsten der hier mitgeteilten Gedanken. Ich übergebe sie nicht ohne zweifelhafte Gefühle der Öffentlichkeit. Ich wage nicht, zu hoffen, daß es dieser dürftigen Arbeit – in unserm dunkeln Zeitalter – beschieden sein könnte, Licht in das eine oder andere Gehirn zu werfen. Ich möchte nicht mit meiner Schrift Andern das Denken ersparen; sondern, wenn es möglich wäre, jemand zu eigenen Gedanken anregen.

00.08.1938

127[1] Man ist versucht, zu fragen: "*Wie* denkt man den Satz ..., *wie* erwartet man, daß das & das eintreffen wird?" (wie macht man das?). Denken, Erwarten, Glauben, Tätigkeiten eines psychischen Mechanismus; den wir nicht verstehen. Der Satz, dessen Inhalt gedacht wird, kommt in dieser Tätigkeit vor, etwa wie die Karten in der des Musterwebstuhls.

127[2] Die philosophische Unklarheit die Idee des Denkens betreffend, zusammen mit Problematischem der Psychologie, wird unter dem Bild eines uns verborgenen Mechanismus vorgestellt. Dieser Mechanismus: das Gehirn, übertragen ins Ätherische.

127[3] “Wie arbeitet der Gedanke, wie bedient er sich seines Ausdrucks?” analog: “Wie arbeitet der Musterwebstuhl, wie bedient er sich der Karten?”

127[4] & 128[1] Es scheint: “Glauben” beschreibt etwas, was mit dem Satz geschieht – so wie “verdauen” etwas, was mit der Speise geschieht. Man könnte dann das Glauben verstehen, wenn man wüßte, was dabei eigentlich vorgeht. Man hätte dann den ‘Vorgang des Glaubens’ analysiert.

128[2] Freilich – was sich uns da auftun, & wie es sich uns erschließen müßte, das wissen wir so recht nicht.

128[3] Aber wenn nun Einer herausgefunden hätte, daß, wenn man den Satz … glaubt, *in irgend einem Sinne*, die & die komplizierten Vorgänge in unserm Geiste vorgehen, – so bliebe die Frage: wozu tut man dies?

128[4] & 129[1] Es sind gar nicht unerforschte Vorgänge des Glaubens was uns interessiert, sondern der Gebrauch der uns wohlbekannten Vorgänge des Glaubens, z.B. des Aussprechens des Satzes “ich glaube …”. Auf die Frage “wie macht man das?”, die man etwa durch Introspektion beantworten will, kommt nichts was man brauchen kann zur Antwort. Es heißt da: ich sage dies, ich stelle mir das & das vor, und dergleichen.

129[2] Der Mechanismus, den wir nicht verstehen, ist keiner in unserm Geist, – sondern der des Lebens, in dem diese Äußerung schwimmt.

129[4] & 130[1] Könnte eine Maschine denken? – – Könnte sie Schmerzen haben? – Nun – soll ich den menschlichen Körper eine solche Maschine nennen? Er kommt doch am nächsten dazu, so eine Maschine zu sein.

Aber das Wort "ich" im Satz "ich habe Schmerzen" bezeichnet nicht einen Körper – also steht es auch nicht für eine Maschine.

130[2] Wir fragen: "Was ist ein Gedanke, welcher Art muß er sein um seine Funktion erfüllen zu können?" Hier will man sein Wesen aus seinem Zweck, aus seiner Funktion heraus sich deutlich machen.

130[3] & 131[1] Aber was ist seine Funktion? Willst Du sehen, wie das Denken verwendet wird? Die Berechnung eines Kessels & die, dieser entsprechenden, Verfertigung muß ein Beispiel des Denkens sein.

131[2] Ist die *Vorstellung* das Portrait par excellence, grundverschieden (z.B.) von einem gemalten Bild & in der Sprache durch ein solches nicht ersetzbar? Ist sie das, was eigentlich eine bestimmte Wirklichkeit darstellt, – zugleich Bild & Intention? Denn so ein Wunderding, scheint es, brauchen wir?

131[3] Und die Vorstellung scheint es zu sein: Denn ich kann nicht zweifeln, wenn ich mir Napoléon vorstelle, ob es wirklich Napoléon ist, den ich mir vorstelle, & nicht nur jemand der ihm ähnlich sieht.

131[4] Aber ist nicht der Satz dieses Wunderding? der *sagt*, was er *meint*.

132[1] Sokrates zu Theaitetos: “Und wer vorstellt, sollte nicht *etwas* vorstellen?” Th.: “Notwendig.” – Sok.: “Und wer etwas vorstellt, nichts Wirkliches?” – Th.: “So scheint es.” Und wer malt sollte nicht etwas malen – & wer etwas malt, nichts Wirkliches? – Ja, was ist das Objekt des Malens: das Bild, oder ein Gegenstand, den es darstellt?

132[2] Die Vorstellung kann doch verschiedenerlei Beziehungen zur Wirklichkeit haben; wie auch das gemalte Bild. Dies kann ein Märchenbild sein, ein Genrebild, ein Portrait & unzähliges andere.

133[1] Was macht ein Bild zum Bildnis des N.N.?

133[2] & 134[1] Ist das Denken ein spezifisch organischer Vorgang? Wie ein Kauen oder Verdauen des Geistes? Kann man ihn (in diesem Falle) durch einen anorganischen Vorgang ersetzen, der denselben Zweck erfüllt; also sozusagen mit einer Prothese denken. Und könnte man sich dann das Denken mittels einer Prothese denken. Wie hätte man sich eine Denkprothese vorzustellen.

134[3] *Irreführende* Parallele: Der Schrei, ein Ausdruck des Schmerzes – der Satz ein Ausdruck des Gedankens! Als wäre es der Zweck des Satzes einen wissen zu lassen, wie Einem zu Mute ist. Nur, sozusagen, im Gehirn & nicht im Magen.

134[4] & 135[1] Frag nicht: “Was ist der Gedanke?” – denn diese Frage stellt ihn Dir schon als ätherisches Wesen hin.

135[2] Ich habe diesen Ausspruch eines französischen Politikers gelesen: die französische Sprache sei dadurch ausgezeichnet, daß in ihr die Wörter in der Ordnung folgen, wie man wirklich denkt. ~~(Während man im Deutschen z.B. das Verbum wohl schon im Anfang denkt es aber erst am Schluß sagt.)~~ Überlege Dir die seltsame, aber sehr verbreitete, Auffassung, die sich hier ausspricht.

136[1] Wozu denkt der Mensch? wozu ist es nütze? Wozu *berechnet* er Dampfkessel & überläßt die Wandstärke nicht dem Zufall. Es ist doch nur Erfahrungstatsache, daß Kessel, die so berechnet wurden, nicht so oft explodieren. Aber so, wie er alles eher täte als die Hand ins Feuer stecken, daß ihn früher gebrannt hat, so wird er alles eher tun, als den Kessel nicht berechnen. Da uns aber Ursachen nicht interessieren, so können wir nur sagen: Die Menschen denken tatsächlich: sie gehen, z.B., auf diese Weise vor, wenn sie einen Dampfkessel bauen. – Kann nun ein so erzeugter Kessel nicht explodieren? Oh doch! –

136[2] Denkt der Mensch also, weil denken sich bewährt hat? Weil er denkt, es sei vorteilhaft, zu denken? (Erzieht er seine Kinder, weil es sich bewährt hat?)

136[3] Wie wäre herauszubringen: *warum* er denkt?

137[1] Und doch kann man sagen, das Denken habe sich bewährt. Es seien jetzt weniger Kesselexplosionen als früher, seit etwa die Wandstärken nicht mehr nach dem Gefühl bestimmt, sondern auf die & die Weise berechnet werden. Oder, seit man jede Berechnung von einem dazu bestimmten Organ kontrollieren läßt.

137[2] *Manchmal*, also, denkt man, weil es sich bewährt hat.

137[4] Ich weiß nicht *warum* ich denken sollte. Aber ich denke.

137[5] Was sollte ich als Grund angeben dafür: weswegen man denken soll? – Es sei denn einen Grund von der Art dessen, weswegen man essen soll.

137[6] & 138[1] Man kann sagen: *Begründung* ist etwas *innerhalb* eines Denksystems.

138[2] "Ist es Willkür, daß wir *dies* als Grund von *dem* betrachten?" – Ist es Willkür, daß wir auf die Erzählung, dieser Hund habe gebissen, diesem Hund nicht in die Nähe gehen wollen?

138[3] Was ist der Gedanke? Was ist sein Wesen?

"Der Gedanke, dieses seltsame Wesen."

Sage Dir beim Philosophieren immer wieder: daß Denken etwas ganz Hausbackenes sein muß – – daß Du verführt bist, wenn Dir das Denken als ein seltsamer Vorgang erscheint.

138[5] & 139[1] Die grammatischen Regeln sind zu vergleichen Regeln über das Vorgehn beim Messen von Zeiträumen, von Entfernungen, Temperaturen, Kräften, etc. etc.. Oder auch: diese methodologischen Regeln sind selbst Beispiele grammatischer Regeln. Grammatische Regeln wird man mit Vorteil Übereinkommen vergleichen.

139[2] “Die Maßeinheit ist willkürlich” (wenn dies nicht heißen soll: “wähle *in diesem Falle* die Einheit ganz wie Du willst”) sagt nichts anderes, als daß die Angabe der Maßeinheit (z.B.) keine Längenangabe ist (obwohl sie so klingt). Und zu sagen, die Regeln der Grammatik sind willkürlich, sagt bloß: Verwechsle eine Regel über den Gebrauch des Wortes ‘A’ nicht mit einem Satz, in dem vom Wort ‘A’ Gebrauch gemacht wird.

Denk nicht, die Regel sei in ähnlicher Weise einer Realität verantwortlich, mit einer Realität zu vergleichen, wie der Erfahrungssatz, der von A handelt (oder wie die Regel: “Um weiche Eier zu erhalten, koche die Eier 3 Minuten lang”, die ein Erfahrungssatz ist in Form einer Regel).

140[1] “Die grammatischen Regeln sind willkürlich” heißt: ihr *Zweck* ist nicht der, (z.B.) dem Wesen der Negation, oder der Farbe, zu entsprechen – sondern der Zweck der Negation & des Farbbegriffes. Wie der Zweck der Schachregeln nicht ist, dem Wesen des Schachspiels zu entsprechen, aber dem Zweck des Spiels.

140[2] Oder: – Die Schachregeln sollen nicht dem Wesen des Schachkönigs entsprechen, denn sie *geben* ihm dieses Wesen. Wohl aber sollen die Regeln des Kochens & Bratens der Natur des Fleisches entsprechen. – Dies ist natürlich eine grammatische Bemerkung.

140[3] Die allbekannte Wahrheit simpel & ohne Entstellung aussprechen kann von großen Folgen sein.

140[4] & 141[1] Wenn dieses Buch geschrieben ist, wie es geschrieben sein sollte, so muß, was ich sage, alles leicht verständlich, ja trivial sein, schwer verständlich aber, *warum* ich es sage.

141[2] Dieser Kalkül, die Zahlentheorie etwa, zeigt nicht, welche wunderbare Eigenschaften Gott den Zahlen gegeben hat; sondern, welche Eigenschaften er uns & den Dingen gegeben hat, daß dieser Kalkül *nützlich*, *interessant* &, mit unsern Schreibbehelfen, leicht *ausführbar* ist.

141[3] "Was ist eine Regel?" – Ist sie ein Erfahrungssatz über den tatsächlichen Gebrauch von Wörtern oder Schachfiguren? Ist sie die Äußerung eines Wunsches, man möge sie so gebrauchen – ein Befehl – oder ein Vorschlag? – Was ist sie also?

141[4] & 142[1] Kaufe Dir in einer Spielwarenhandlung ein Spiel; Du erhältst eine Schachtel, darin die Implemente des Spiels & ein Regelverzeichnis. Was sind das für Sätze, diese Regeln? Wird Dir in ihnen etwas befohlen, oder angeraten, mitgeteilt, daß Leute so gehandelt haben? Nun, sieh doch nur nach, wie die Regeln gebraucht werden! Die meisten Menschen, die das Spiel kaufen, lesen die Regeln & spielen nach ihnen.

142[2] Eine solche Regel aber könnte Teil eines Befehls sein (nach ihr zu handeln), oder Teil eines Berichts (es werde nach ihr gehandelt), usw.. Und die Regel könnte auch selbst als Befehl, Bericht, etc. verwendet werden.

142[4] & 143[1] Frage Dich auch: “Was ist ein Strafgesetz?” – Ist es ein Satz der Naturgeschichte des Menschen der uns sagt daß ein Mensch von seinen Mitmenschen gestraft wird, wenn er das & das tut? Was unterscheidet ein Gesetz von einem Satz der Naturgeschichte? Ist es nicht die Rolle, die er im Leben von Menschen spielt. Die Maschinerie, in der er verwendet wird?

143[2] Betrachte dies Beispiel: A legt einen Weg zurück einem Befehl gemäß, den B ihm gibt. A erhält die Tabelle

143[3] & 144[1] A gibt einen Befehl, der aus den Buchstaben der Tabelle zusammengesetzt ist – z.B.: “a a c a d d d”. B liest die Buchstaben des Befehls der Reihe nach, übersetzt jeden von ihnen, der Tabelle gemäß, in einen Pfeil & bewegt sich ein gewisses Stück in der Richtung dieses Pfeils. Also in unserm Beispiel so:

Die Tabelle werden wir hier eine Regel nennen. (Oder auch den ‘Ausdruck einer Regel’.) Den Satz “a a c a d d d” werden wir nicht eine Regel nennen. – Er ist natürlich die Beschreibung des Weges den B nehmen soll. – Aber eine solche Beschreibung würde man unter Umständen eine Regel nennen; z.B. in diesem Fall:

144[2] B soll nach Regeln verschiedene Ornamente zeichnen. Jedes Ornament besteht aus der Wiederholung eines Elements, das A ihm angibt. Gibt, z.B., A den Befehl “c a d a”, so zieht B eine gebrochene Linie

usw.

Hier könnte man "c a d a" die Regel nennen, nach der das Ornament gezeichnet wurde. Beiläufig gesprochen, gehört zu einer Regel wiederholte Anwendung.

145[1] Nach einer Regel vorgehen. – Betrachte diese Beispiele: Nachdem das Sprachspiel (...) öfters gespielt wurde, wird es dahin abgeändert, daß B nicht mehr die Tabelle benützt. Die Buchstaben des Befehls rufen die, ihnen (gemäß der Tabelle) entsprechenden, Pfeile in seine Vorstellung. (Kriterium dafür?) Und er handelt nach diesen Vorstellungsbildern. – Oder auch: er handelt nun nach den Buchstaben des Befehls ohne Dazwischenkunft eines Vorstellungsbildes – & zwar, der Tabelle gemäß. (Kriterien hierfür.)

145[2] Der Ausdruck der Regel mag in die Praxis des Spiels eintreten wie in (..), oder nur in den Unterricht im Spiel, oder er mag nur dazu dienen die Art & Weise, wie tatsächlich gespielt wird, zu beschreiben.

145[3] & 146[1] Die Tabelle (…) wird man kaum einen Satz nennen. Aber sie könnte sehr wohl durch einen Satz ersetzt werden: etwa "Dem 'a' entspricht der Pfeil →, dem 'b' ...".

146[2] Eine Regel kann man mit einem Weg auf einer Karte vergleichen. – Könnte ein Weg nicht Ausdruck eines Befehls sein, es solle *so* gegangen werden – oder einer Mitteilung, es werde so gegangen? Kann er aber nicht auch (nur) ein notwendiges Instrument sein, in irgend einer Tätigkeit von da dorthin zu gelangen – oder auch bloß die Gelegenheit die einem geboten wird so zu gehen, weil manche Menschen gern so gehen?

146[3] Man könnte eine Regel ein Satzradikal nennen (im Sinne der Chemie).

147[1] & 147[2] & 147[3] Ich nehme an, wir haben in irgend einer Weise bewiesen, daß (für alle p)

$\vdash \sim \Pi\, p \vee p$

.

Finden wir nun einen speziellen Satz P_1, für den

$P1 = \sim \Pi P$,

so folgt $\vdash \sim \Pi\, P \vee \sim \Pi\, P$. Aber $\vdash \sim \Pi\, P \vee \sim \Pi\, P = \vdash \sim \Pi\, P = \vdash P$.

Ist dies Gödels Gedankengang?

147[4] Mit dem Induktionsbeweis führen wir ein neues Mittel in die Mathematik ein; wir entschließen uns, etwas Neues als Beweis anzuerkennen.

147[5] & 148[1] Der Satz "P" ist ein Komplex von Russellschen Zeichen; er kann daher auf Englisch oder Deutsch gelesen werden. Und zwar als Satz mit dem Anfang: "Es ist nicht beweisbar, daß" – & jetzt kommt ein Satz den wir aus den weiteren Zeichen von "P" ableiten müssen & dabei erhalten wir die Zeichenfolge "P".

148[2]

148[3] 03.02.1940

Das heißt natürlich, das Wort “Sinn” in anderm Sinne gebrauchen; aber dies wäre nicht unnatürlich. Denn einerseits haben die beiden Sätze natürlich den gleichen – nämlich keinen – Sinn (auch wenn statt ‘p’ ein wirklicher Satz steht). Anderseits, daß der erste Satz wahr ist – d.h. hier, daß er eine Tautologie ist – wird anders erhalten, als, daß der andre es ist. – Es handelt sich eigentlich darum, ob der Satz

“~e1p≡p”

anders anzuwenden ist als “$\sim \sim p \equiv p$”.

148[4] & 149[1] Wenn ich (so) verschiedene Techniken lerne, die p^{te} Anzahl von Strichen zu erzeugen, muß ich diese als Techniken auffassen, das Zahlzeichen jener Anzahl in abgekürzter Form zuschreiben? Muß ich bei solchen Konstruktionen eine Abkürzung im Sinn haben?

149[2] Nehmen wir an, wir sagten, die Konstruktion könnte mich nicht überzeugen, daß bei der Ausrechnung von 2^4 16 herauskommen muß – wie kann ich dann die Technik des *Definierens* mit Überzeugung verwenden? Muß Russell mir auch mittels logischer Beweise demonstrieren, daß beim Zurückführen eines Ausdrucks auf die primäre Schreibweise das Richtige herauskommen muß?

149[3] Oder auch: Dieselbe Technik, die zur Abkürzung eines Schriftzeichens angewandt werden kann, kann auch ganz anderen Zwecken dienen.

149[4] (Und wenn den Menschen gewisse Schriftzeichen aus irgend welchen Gründen zu *kurz* wären, warum sollten sie sie nicht mit Hilfe von Definitionen verlängern?)

149[5] & 150[1] Es ist mir, als könnte ich mit meinen Betrachtungen einen sehr wertvollen Samen säen; der aber wahrscheinlich nicht aufgehen wird.

150[2] 04.02.1940

Die Konstruktion in der obigen Figur könnte man eine geometrische Untersuchung nennen. Ich habe die Reihe von Strichreihen gezeichnet & mit Buchstaben versehen, um der letzten Strichreihe einen Platz anzuweisen. Und ich könnte das sehr wohl getan haben, ohne die Buchstaben in der Reihenfolge des Alphabets zu schreiben. Die Verschiedenheit der Buchstaben gehört zum Wesen dieser geometrischen Konstruktion.

150[3] & 151[1] Aber in wiefern kann man denn das Zeichnen dieser Linien eine *Untersuchung* nennen? Eine Untersuchung ist es doch nur dann, wenn es zur Beantwortung einer Frage geschieht. – Die Frage ist: "Was kommt heraus, wenn ich das & das tue?" Dieses "das & das" muß also vorerst *allgemein* festgelegt sein: Es muß schon eine Technik der Untersuchung existieren.

151[2] Will ich nicht sagen, daß die Untersuchung der Reihe p eine mathematische Untersuchung ist – aber keine logische?

151[3] Wie nun, wenn jemand sagen würde: "die Mathematik ist eine Klasse von Untersuchungen, nicht eine Klasse von Sätzen"?

VB 151[4] Not funk but funk conquered is what is worthy of admiration & makes life worth having been lived. Der Mut, nicht die Geschicklichkeit; nicht einmal wie Inspiration, ist das Senfkorn, das zum großen Baum emporwächst. Soviel Mut, soviel Zusammenhang mit Leben & Tod. (Ich dachte an Labor's & Mendelssohn's Orgelmusik.) Aber dadurch, daß man den Mangel an Mut in einem Andern einsieht, erhält man selbst nicht Mut.

151[5] & 152[1] Kommt das darauf hinaus, daß – wie man in der Mengentheorie sagen würde – es 'mehr' mathematische Untersuchungen gibt als mathematische Sätze eines Systems? Existiert hier eine Verbindung mit Gödels Theorem? Wenn, so kann es nur eine ganz lose Verbindung sein. − −

VB 152[2] Man könnte sagen: "Genie ist *Mut im Talent*".

152[3] Man könnte zunächst fragen: Kann nicht, daß zwei verschiedene Beweise zu demselben Satz führen, in zwei verschiedenen mathematischen Sätzen ausgedrückt werden, deren jeder durch einen der beiden Beweise bewiesen ist? Das heißt natürlich nicht, man dürfe nicht sagen, daß zwei Beweise das Gleiche beweisen. Aber es heißt, daß ein Beweis als Beweis nicht nur *eines* Satzes aufgefaßt werden kann.

152[4] Und *wie* hilft uns hier die geometrische Auffassung des Beweises (denn sie ist natürlich nur *eine* Auffassung)?

153[1] Aber wenn man nun sagte: Die Beweisbarkeit dieses Satzes durch diesen Beweis könnte doch auch anders als durch den Beweis selbst bewiesen werden!

153[2] Ich will sagen: Ein Beweis demonstriert außer dem bewiesenen Satz noch etwas Wichtiges.

VB Trachte geliebt & nicht-bewundert zu werden.

153[3]

153[4] Aber das doch nur, wenn wir uns für dieses Andere interessieren. Und mit diesem andern meine ich etwas Mathematisches, & nicht etwas Psychologisches. Und, uns für das andere Mathematische interessieren, heißt, den Beweis als Glied eines andern mathematischen Systems behandeln.

153[5] Richtiger wäre gewesen: Ein Beweis *kann* uns außer dem bewiesenen Satz noch etwas anderes Wichtiges zeigen. Und zwar, wenn wir ihn als Glied eines andern Systems betrachten.

RFM III
154[1] "Jeder Beweis zeigt nicht nur den bewiesenen Satz, sondern auch, daß er sich *so* beweisen läßt." – Aber dies letztere läßt sich ja auch anders beweisen. – "Ja aber der Beweis beweist es auf eine bestimmte Weise & beweist, daher, daß es sich auf diese Weise demonstrieren läßt." – Aber auch *das* ließ sich durch einen andern Beweis zeigen. – "Ja aber eben nicht auf diese Weise." – Das heißt doch etwa: Dieser Beweis ist ein mathematisches Wesen, das sich durch kein andres Wesen ersetzen läßt; man kann sagen, er könne uns von etwas überzeugen wovon uns nichts anderes überzeugen kann, & man kann ihm daher einen Satz zuordnen, den man keinem andern Beweis zuordnet.

154[2] Das Cantorsche Schema mit dem "usw." als Zeichen aufgefaßt. 'Wie kann es mehr als $\aleph_0$ Zeichen geben?'

155[1] ‘Es gibt keine Kiste, groß genug, (um) alle Kisten der Welt in sich aufzunehmen.’

RFM III 155[2] Aber mache ich nicht einen groben Fehler? Den Sätzen der Arithmetik & den Sätzen der R.schen Logik ist es ja geradezu wesentlich, daß verschiedene Beweise zu ihnen führen. Ja sogar, daß unendlich viele Beweise zu einem jeden von ihnen führen.

RFM III 155[3] Ist es richtig, zu sagen, daß jeder Beweis uns von etwas überzeugt, wovon kein anderer uns überzeugt? Wäre dann nicht – sozusagen – der bewiesene Satz überflüssig, & der Beweis selbst auch das Bewiesene?

RFM III 155[4] Überzeugt mich der Beweis nur vom bewiesenen Satz?

05.02.1940

RFM III 155[5] & 156[1] Was heißt: “ein Beweis ist ein mathematisches Wesen, das sich durch kein anderes ersetzen läßt”? Es heißt doch, daß jeder besondere Beweis einen Nutzen hat, den kein anderer hat. Man könnte sagen: “– daß jeder Beweis, auch eines schon bewiesenen Satzes, eine Kontribution zur Mathematik ist”. Warum aber ist er eine Kontribution, wenn es bloß darauf ankam, den Satz zu beweisen? Nun, man kann sagen: “der neue Beweis zeigt (oder *macht*) einen neuen Zusammenhang”. (Aber gibt es dann nicht einen mathematischen Satz, welcher sagt daß dieser Zusammenhang besteht?)

VB 156[2] Man muß manchmal einen Ausdruck aus der Sprache herausnehmen, ihn zum Reinigen geben, – & kann ihn dann wieder in den Verkehr einführen.

RFM III 156[3] Was *lernen* wir, wenn wir den neuen Beweis sehen, außer den Satz, den wir ohnehin schon kennen? Lernen wir etwas, was sich nicht in einem mathematischen Satz ausdrückt?

156[4] & 157[1] Wie, wenn ich sagte: "wir lernen den Satz *so* konstruieren"? Oder wir könnten sagen: "wir lernen, daß uns diese Konstruktion des Satzes *überzeugt*" – aber ist das eine mathematische Tatsache? 06.02.1940 Es könnte Einer sagen: nun es ist eben interessant einen neuen Beweis eines Satzes zu sehen! Aber warum soll es interessant sein?

157[2] 07.02.1940

Welcher Art ist ein Satz: "*Das* ist ein Beweis von *dem*"? Dieser Satz kann offenbar sehr verschiedene Bedeutungen haben.

157[3] Z.B.: "Diese Satzfolge beweist ihren letzten Satz." "Diese Satzfolge beweist 'p' aus 'q', 'r' & 's'."

157[4] "Statt – "so ist dieser Satz bewiesen" könnte man sagen: "so ist dieser Satz wahr". Oder: "in *diesem* Sinn ist der Satz wahr"."

157[5] 08.02.1940

'Dient der Beweis nur dazu, uns zu überreden? – Aber er überredet uns doch nur das zu glauben, was *wahr* ist!' Ja, daß diese Überredungskünste glücken, scheint das Kriterium dieser Wahrheit zu sein.

157[6] & 158[1] Was heißt es, die Konstruktion

als Beweis dafür anerkennen, daß $13 = 4 \times 3 + 1$ (ist)? Was heißt es, sie *nicht* als Beweis dafür anzuerkennen? Heißt dies, daß das Ergebnis der Konstruktion nicht immer das Gleiche sein muß, oder, daß das Ergebnis nichts mit dem Arithmetischen Satz zu tun hat?

158[2] Betreibt man Logik mit dem Abakus?

RFM III 158[3] Inwiefern hängt die Anwendung eines math. Satzes davon ab, was man als seinen Beweis gelten läßt & was nicht?

RFM III 158[4] & 159[1] Ich kann doch sagen: Wenn der Satz $137 \times 373 = 46792$ im gewöhnlichen Sinne wahr ist, *dann muß es eine Multiplikationsfigur geben*, an deren Enden die Seiten dieser Gleichung stehen. Und eine Multiplikationsfigur ist ein Muster, das gewissen Regeln genügt. Ich will sagen: Erkennte ich die Multiplikationsfigur nicht als *einen* Beweis des Satzes an, so fiele damit auch die Anwendung des Satzes auf Multiplikationsfiguren fort.

159[2] 09.02.1940

Der Begriff der 'Anwendung' ist aber hier noch einigermaßen unklar. Ich meinte die Anwendung des unzeitlichen Beweises auf den zeitlichen Beweisvorgang.

159[3] Welche Anwendung hat (nun) der Beweis für den Mann, der Tapetenmuster entwirft? Aus ästhetischen Gründen entwirft er Multiplikationsfiguren. (Die Regeln des Multiplizierens können in diesem Fall die Rolle der Regeln der Harmonielehre spielen.) [Ich bin sehr geistreich.]

159[4] 10.02.1940

Ich bin im unklaren über den Nutzen eines bestimmten Beweises.

159[5] Könnte Einer der keinen Beweis eines math. Satzes kennte ihn überhaupt verstehen? Und wenn er also keine Ahnung von der Art des Beweises hätte könnte er ihn dann auch nur wahr *glauben*?

159[6] & Welche Rolle könnte eine *Rechnung* in einer *Beschreibung*
160[1] spielen?

160[2] Was soll der Beweisvorgang hinter den Kulissen der Sprache?

160[3] Der Beweis arbeitet, hinter der Szene der Beschreibung (oder auch, auf dem Schnürboden).

VB Wie schwer fällt mir zu sehen, was *vor meinen Augen liegt*!

160[4]

160[5] Prüfe: ‘Wer einen neuen Beweis eines Satzes entdeckt hat, hat eine neue Anwendung des Satzes entdeckt.’

160[6] Du mußt Dich immer fragen: “*Arbeitet* dieser Satz, & *wie* arbeitet er?”

RFM III Die *genaue* Entsprechung eines richtigen (überzeugenden)
160[7] Übergangs in der Musik & in der Mathematik.

160[8] & Es *kann* natürlich das Interesse eines neuen Beweises auch in
161[1] seiner Kürze liegen. Aber er setzt doch auch den Satz in einen neuen Zusammenhang (möchte man sagen). Nämlich in einen Zusammenhang, – in dem er wieder ‘bewiesen’ erscheint.

161[1] Daher wiederum die Frage: Was ist das für eine Tatsache, daß etwas ein *Beweis* eines Satzes ist?

161[2] Was ist es für eine Tatsache, daß etwas ein ‘richtiger Schluß’ ist?

161[3] ‘Zu diesem Punkt führt auch *dieser* Beweisweg.’ Der Beweisweg, gleichsam ein Weg des geringsten Widerstandes (oder dergl.).

RFM III 11.02.1940

161[4]

Bedenken wir, daß es nicht genug ist, daß sich zwei Beweise im selben Satzzeichen treffen! Denn wie wissen wir, daß dies Zeichen beidemale dasselbe sagt? *Dies* muß aus anderen Zusammenhängen hervorgehen.

161[5] Welche Rolle spielt der Beweisweg zu einer grammatischen Regel *in der Praxis* der Sprache?

162[1] Auf diesem Weg werde ich überzeugt – heißt nicht nur: *so* stellt man es an, um mich zu überzeugen – sondern: dort liegt das, wovon ich überzeugt wurde.

162[2] Der Beweis muß den Nutzen der Regel zeigen. Denn *dem* zuliebe nehme ich ihn ja an.

162[3] Könnte man sagen: “Der Beweis muß mir die Konflikte zeigen, die zu vermeiden ich die Regel annehme”? – “Die Abgründe, denen auszuweichen ich diese Regel annehme”.

162[4] 13.02.1940

Warum muß ich einem Menschen zeigen, *warum* er eine Regel annehmen soll?

162[5] Aber die Regeln, nach denen ich grammatische Regeln bilde sind doch auch grammatische Regeln.

162[6] & 163[1] Beweis, daß die Winkelsumme eines Dreiecks ungefähr 180° ist.

Welche Tätigkeit nennt man ‘dies beweisen’? Ähnlich: Beweis des Mittelwertsatzes.

Welches ist hier die Beweistätigkeit?

163[2] 14.02.1940

Bedenke bei dem Beweis

,

den ich meinte: was *wagst* Du auf den Beweis hin? Denn darauf kommt es ja an.

163[3] Was wage ich auf diesen Beweis hin, daß jede Gleichung $\mathrm{n}^{\mathrm{ten}}$ Grades n Wurzeln hat? *In welchem Sinn* hat sie n Wurzeln?

163[4] Angenommen, ich sagte 25 × 25 sei gleich 526, das Zeichen ‘526’ wäre aber so anzuwenden, wie jetzt sein Spiegelbild – hätte meine Regel dann denselben Sinn, wie wenn ‘526’ auf die gewöhnliche Art anzuwenden wäre?!

163[5] & 164[1] Man könnte *wohl* sagen: Der versteht den Sinn der Regel nicht, der das *System* nicht kennt, zu dem sie gehört. Aber das hieße doch: Der versteht den *Witz* der Regel nicht.

164[2] Der neue Beweis stellt den bewiesenen Satz in einen neuen Zusammenhang. Er gibt *neue* Gründe für die Anerkennung dieser Regel. *Aber hier ist eine Unklarheit*. – Der neue Beweis zeigt die Regel im Zusammenhang mit andern Regeln, die ihr stehen (wie man sagt, ein Hut 'stehe' jemand). Aber, daß sie ihr stehen – will ich sagen – ist doch kein mathem. Faktum. Der neue Beweis zeigt den Satz in einer neuen Umgebung, die zu ihm paßt.

RFM III Denke, ich gäbe jemand die Aufgabe: 'Finde einen Beweis des
164[3] Satzes ...' – die Antwort ist doch, daß er mir gewisse Zeichen vorlegt. Nun gut: *welcher* Bedingung müssen diese Zeichen genügen? Sie müssen ein Beweis jenes Satzes sein – aber ist das etwa eine *geometrische* Bedingung? Oder eine psychologische? Manchmal könnte man es eine geometrische Bedingung nennen; dort, wo die Beweismittel schon vorgeschrieben sind & nur noch eine bestimmte Zusammenstellung gesucht wird.

165[1] 15.02.1940

Der Beweis zeigt, daß unser Satz auch *dieser* Überlegung entspricht.

165[2] Das Perniziöse an der Dirichletischen Auffassung der Funktion: daß sie eine Art *hypothetische* Notation einführt; die angeblich verwendet werden *könnte*, wenn wir anders beschaffen wären. Denn die Idee daß eine Funktion, z.B. sin x, eine Art von Tabelle ist, in der den Werten von x die Werte von sin x zugeordnet sind, wäre nur richtig, wenn man *tatsächlich* so eine Tabelle statt 'sin x' gebrauchen könnte, wenn eine Tabelle ein mögliches *Zeichen* statt 'sin x' wäre. So wie z.B. meine W.F. Tabellen tatsächlich als Zeichen statt '⌄', '~', etc. gebraucht werden können.

165[3] 'Manche mathem. Beweise sind die *Ausrechnungen* von Sätzen; manche nicht.' Aber man hätte doch jedenfalls den Satz durch die Überlegungen des Beweises *erhalten* können!

166[1] Wie aber, wenn ich das distributive Gesetz mach dem Skolemschen Beweis *nicht* angenommen hätte? Kann man sagen, ich hätte gegen eine *Regel* verstoßen?! – Freilich – : wo *endet* dann der Skolemsche Beweis? Man könnte ihn *so* enden lassen: "Und nun möchte man vielleicht schließen daß für alle Zahlen a b c ..., aber das tun wir nicht, sondern sagen ...".

166[2] Ich will sagen: Der Skolemsche Beweis befriedigt uns *nicht* darum, weil er einer Regel folgt.

166[3] Oder: Mathematische Überlegung ist etwas nicht darum *weil* es einer Regel folgt. – Was heißt es aber: 'Auf Grund dieser Überlegung erkenne ich diesen Satz an'? Wie weiß ich (sozusagen) daß es auf Grund dieser Überlegungen geschieht?

166[4] & 167[1] Wie ergibt sich aus einer Regel eine andere? Was ist das Kriterium des *Passens*? Passen diese beiden Figuren

zusammen? – Das könnte heißen: "Passen sie nach der & der Regel?", oder auch: "Sollen wir sagen solche Figuren 'passen', & daher dies etwa auch von den & den andern sagen?".

167[2] Wem ich Skolems Überlegung zeige, der wird nun geneigt sein, zu sagen, daß die Transformation jedes Zeichens 'a + (b + c)' das entsprechende Zeichen '(a + b) + c' ergeben müsse. Und wird insbesondere geneigt sein dies in dem & dem speziellen Fall zu sagen, obwohl er die Transformation nicht ausgeführt hat. Er hat sich entschlossen ein neues Kriterium dafür anzunehmen, daß das Resultat der Umformung *dies* ist.

167[3] Was hat der gefunden, der eine neue Überlegung findet, die mich dorthin führt? Was ist der Nutzen der neuen Überlegung, wenn ich schon an ihrem Ziel bin?

167[4] Die neue Überlegung ein neues Paradigma?

167[5] & 168[1] 16.02.1940

Ich möchte etwas sagen, wie: daß die neue Überlegung eine neue Anwendung nahelegt. Dort nämlich wo diese *neue* Überlegung interessant ist. (Denn wenn ich in einer Überlegung nur ein 'a' durch ein 'b' ersetze, so nennen wir was entsteht nicht einmal eine neue Überlegung.)

168[2] 'Du kannst es Dir aber auch so überlegen …'.

168[3] ‘Eine Überlegung’ – könnte man sagen – ‘zeigt Prinzipien des Überlegens.’

VB 17.02.1940

168[4]

Du kannst nicht die Lüge nicht aufgeben wollen & die Wahrheit sagen.

168[5] & 169[1] Kannst Du Dir jemanden denken, der das Argument des Induktionsbeweises nicht annähme? Der sagt: Ja, ich sehe: – wenn man 1 durch 3 dividiert bleibt der Rest 1 & nun muß man wieder durch 3 dividieren – – aber ob das auch so weitergeht, weiß ich nicht. Wie, wenn er bei der 40^{sten} 3 angelangt auf 4 übergeht & sagt, *das* sei jetzt die Fortsetzung in der gleichen Weise? Wir sagen: er habe uns mißverstanden. Aber er sagt, er habe uns *nicht* mißverstanden. Konnten wir es denn im vorhinein durch eine Regel verhindern, daß er plötzlich (einmal) von uns abweicht?

169[2] Aber können wir uns auch den Andern denken, der (zwar) das rekursive Argument annimmt, aber nicht das Argument welches alle Stufen durchläuft? Ich glaube, ja. Er würde dem letzteren mißtrauen etwa mit der Begründung, er könne nie ganz sicher sein wenn er einen Prozeß wiederhole ob er auch wirklich beidemal das Gleiche tue.

169[3] & 170[1] Was ist der Nutzen davon, daß wir eine neue Überlegung kennen lernen? Nun vor allem einmal braucht das gar keinen Nutzen zu haben, wenn etwa die neue Überlegung der alten zu ähnlich sieht.

Wenn wir, z.B., das distributive Gesetz auch unabhängig vom Skolemschen Beweis annehmen, so lehrt uns doch der Skolemsche Beweis die **Induktions**maschinerie kennen, die mit dem Gesetz übereinstimmt.

170[2] Was ist der 'grammatische Wert' dieser Induktionsmaschinerie?

170[3] Wie kommt es, daß ich schreiben kann '25 × 25 = 625' & nicht schreiben muß 25 × 25 sei *auf diese Weise* 625, indem ich nämlich die ganze Multiplikation anschreibe? Es ist schon wichtig daß man wisse daß der Gleichung 25 × 25 = 625 eine Multiplikation entspreche, daß diese Gleichung, z.B., keine Definition ist.

170[4] Das Induktionsschema steht für eine Technik der Bildung von Ausdrücken.

170[5] Ich lerne etwa eine neue Technik ein Zeichen dieser Form in ein Zeichen jener Form zu überführen. Und warum sollte das nicht nützlich sein können?

171[1] 18.02.1940

Wenn man in der Mathematik einen Satz so formuliert "Man kann nicht ..." (z.B. "Man kann den Winkel mit ... nicht 3-teilen") so deutet man schon eine *Verwendung* des Satzes an: *die* nämlich, Einen zu überzeugen er solle die Versuche des 3-Teilens lassen da dabei nichts herauskommen könne. Wir haben also hier schon eine Voraussage. Ähnlich, wenn wir sagen: "Nach jeder Primzahl gibt es eine größere."

171[2] Technik mehrere Leute dasselbe Ornament zeichnen zu lassen, ohne daß sie es von einer gemeinsamen Vorlage kopieren: Wir lehren sie, z.B., Multiplizieren & können dann *tatsächlich* sicher sein, daß alle auf einen *neuen* Befehl dasselbe Ornament zeichnen werden.

171[3] 19.02.1940

Wenn Du die Lüge nicht prinzipiell aufgeben willst; so kannst Du sie *nicht* aufgeben.

171[4] & 'Diese Überlegungen führen zu demselben Resultat.' Die
172[1] beiden Überlegungen, etwa zwei charakteristische Weisen, 100 Kugeln in 5 Gruppen zu 20 Kugeln überzuführen. Den Charakter von *Überlegungen* erhalten diese Überführungen durch den Zweck dem sie dienen.

RFM III 20.02.1940
172[2]

Sind die Sätze der Mathematik anthropologische Sätze, die sagen wie wir Menschen schließen & kalkulieren? – Ist ein Gesetzbuch ein Werk über Anthropologie das uns sagt wie die Leute dieses Volkes einen Dieb etc. behandeln? − − Könnte man sagen: "Der Richter schlägt in einem Buch über Anthropologie nach & verurteilt hierauf den Dieb zu einer Gefängnisstrafe." Nun der Richter *gebraucht* das Gesetzbuch nicht als Handbuch der Anthropologie. (Gespräch mit Sraffa.)

172[3] 'Was sollen wir *sagen*?' fragt der Philosoph.

172[4] 'Schau es so an, & es kommt dasselbe heraus.'

172[5] & 173[1] Wir sagen: diese beiden Bilderreihen überzeugen uns von demselben.

RFM III 173[2] Die Prophezeiung lautet *nicht*, daß der Mensch, wenn er bei der Transformation dieser Regel folgt *das* herausbringen wird– sondern, daß er, wenn wir *sagen*, er folge der Regel, das herausbringen werde.

RFM III 173[3] & 174[1] Wie, wenn wir sagten, daß mathematische Sätze, in *diesem* Sinne, Prophezeiungen sind; indem sie voraussagen, was Glieder einer Gesellschaft, die diese Technik gelernt haben, in Übereinstimmung mit den übrigen Gliedern der Gesellschaft herausbringen werden. “25 × 25 = 625” hieße also, daß Menschen wenn sie unsrer Meinung nach die Regeln des Multiplizierens befolgen, bei der Multiplikation 25 × 25 zum Resultat 625 kommen werden. – Daß dies eine richtige Vorhersage ist, ist zweifellos; & auch, daß das Wesen des Rechnens auf solche Vorhersagen gegründet ist. D.h., daß wir etwas nicht ‘rechnen’ nennen würden, wenn wir so eine Prophezeiung nicht mit Sicherheit machen könnten. Das heißt eigentlich: das Rechnen ist eine Technik. Und was wir gesagt haben, gehört zum Wesen der Technik.

174[2] Man könnte die Prophezeiung auch *so* fassen: – daß Übereinstimmung bezüglich des Resultates der Rechnung erzielt werden wird, wenn Übereinstimmung bezüglich der richtigen Anwendung der Regeln erzielt wird. Oder: daß es unser aller Meinung nach der gleiche Schritt sein wird, wenn er unser aller Meinung nach dieser (eindeutigen) Regel gemäß ist.

174[3] Oder: Wir sind überzeugt, daß ich eine Rechnung dadurch kopieren kann, daß ich sie wieder 'den Regeln gemäß' ausführe.

174[4] & Könnte man nicht sagen, was ich sagen wollte, sei gewesen:
175[1] daß, wo im Rechnen das richtige Prophezeien aufhörte (auch wenn dies z.B. in den Rechnungen der *Logik* der Fall ist), das *Rechnen* selber sein Ende hat.

175[2] Gleite ich aber hier nicht in die Feststellung hinein, die Mathematik bestehe aus Voraussagen, Naturgesetzen, bezüglich unserer Ausübung einer (gewissen) eingelernten Technik?? Wenn ich aber das Rechnen anwende, geschieht es dann immer um solche Voraussagen zu machen? Wenn ich z.B. ausrechne, wie viel Brote ich brauchen werde um ... – so will ich eine Voraussage machen bezüglich der Brote; & der arithmetische Satz ist diese Voraussage noch nicht.

RFM III Zum Rechnen gehört, *wesentlich*, dieser Konsensus, das ist
175[3] sicher. D.h.: zum Phänomen unseres Rechnens gehört dieser Konsensus.

RFM III In einer **Rechen**technik müssen Prophezeiungen möglich sein.
175[4] Und das macht die Rechentechnik der Technik eines *Spiels*, wie des Schachs, ähnlich.

RFM III Aber wie ist das mit dem Konsensus – heißt das nicht, daß *ein*
176[1] Mensch allein nicht rechnen könnte? Nun, *ein* Mensch könnte jedenfalls nicht nur *einmal* in seinem Leben rechnen.

RFM III 176[2] Man könnte sagen: alle *möglichen* Spielstellungen im Schach können als Sätze aufgefaßt werden, die sagen, sie (selbst) seien *mögliche* Spielstellungen; oder auch als Prophezeiungen: die Menschen werden diese Stellungen durch Züge erreichen können welche sie übereinstimmend für den Regeln gemäß erklären. Eine so *erhaltene* Spielstellung ist dann ein bewiesener Satz dieser Art.

RFM III 176[3] "Eine Rechnung ist ein Experiment." – – Eine Rechnung kann ein Experiment sein. Der Lehrer läßt den Schüler eine Rechnung machen, um zu sehen ob er rechnen kann; das ist ein Experiment.

RFM III 177[1] Wenn in der Früh im Ofen Feuer gemacht wird, ist das ein Experiment? Aber es könnte eins sein. Und so sind auch Schachzüge *nicht* Beweise & Schachstellungen nicht Sätze. Und mathematische Sätze nicht Spielstellungen. Und *so* sind sie auch nicht Prophezeiungen.

177[2] Ich könnte also eine Rechnung machen, um vorauszusagen, was ein Anderer bei dieser Rechnung erhalten wird. Und ich könnte dann sagen, ich mache sozusagen ein Experiment mit mir, ich versuche wie ich (auf diese Regeln) reagiere um draus zu schließen, wie er reagieren wird.

177[3] Oder man könnte sagen: Das Rechnen hat sich gut bewährt. Man hat gefunden, wenn man Menschen abrichtet gewisse Operationen mit Strichen vorzunehmen, wenn man dann diese Technik auf bestimmte Weise mit der des Brückenbauens verbindet, so fallen die Brücken nicht ein.

177[4] & 178[1] Aber halt – wenn nun das Rechnen *diesen* Nutzen hätte, – müßte es dann auch noch zu Prophezeiungen über das Resultat von Rechnungen dienen können?

178[2] Ist etwas eine Überlegung, was niemand als nur ich als (eine) Überlegung anerkennt? Oder etwas, was ich nur einmal & nie wieder als Überlegung anerkenne?

RFM III 178[3] Wenn eine Rechnung ein Experiment ist; was ist dann ein Fehler in der Rechnung? Ein Fehler im Experiment? Nicht doch; ein Fehler im Experiment wäre es gewesen, wenn ich die *Bedingungen* des Experiments nicht eingehalten hätte, wenn ich also jemand etwa bei furchtbarem Lärm hätte rechnen lassen.

RFM III 178[4] Aber warum soll ich nicht sagen: Ein Rechenfehler ist zwar kein *Fehler* im Experiment aber ein – manchmal erklärliches manchmal nicht erklärliches – *Fehlgehen* des Experiments?

178[5] & 179[1] Müßte ich nicht sagen die Rechnung sei ein Experiment mit der *Menschheit*, denn die kann keinen Rechenfehler machen.

179[2] Aber ich könnte doch das Verhalten einer Tierart studieren, indem ich Experimente mit einem Tier oder sagen wir mit einer kleinen Gruppe von Exemplaren mache. Es genügt dann wenn in den *meisten Fällen* das Verhalten der Versuchstiere für das Verhalten der übrigen maßgebend ist.

179[3] Und so könnte ich sagen: Beim Rechnen mache ich ein Experiment, ich schaue nach, was ich (unter den richtigen Bedingungen) bei dieser Rechnung herausbringe – weil dies so gut wie immer mit dem, was alle andern unter solchen Bedingungen erhalten, übereinstimmt.

179[4] Oder soll ich sagen: ‘übereinzustimmen *scheint*’?

179[5] & Mache ich ein Experiment, wenn ich die aufgezogene Uhr
180[1] ablaufen & die Zeit zeigen lasse? wenn ich etwa jetzt nachschaue, wie viel Uhr es ist? Nun, es wird niemand das ein Experiment nennen.

180[2] 21.02.1940

Soll ich sagen: “Mathematische Beweise sind Experimente, die uns zeigen, was wir zu sagen *geneigt* sind”?

RFM III “Eine Rechnung, z.B. eine Multiplikation, ist ein Experiment:
180[3] *wir wissen nicht, was herauskommen wird*, & erfahren es nun, wenn die Multiplikation fertig ist.” – Gewiß; wir wissen auch nicht, wenn wir spazierengehen, an welchem Punkt wir uns in 5 Minuten befinden werden – aber ist Spazierengehen deshalb ein Experiment? – Ja; aber in der Rechnung wollte ich doch, von vornherein, wissen, was herauskommen werde; *das* war es doch, was mich interessierte. Ich bin doch neugierig auf das Resultat. Aber nicht als auf das, was ich sagen *werde*, sondern, was ich sagen *soll*.

180[4] & Wenn ich einen Maßstab anfertige, etwa ihn von einem
181[1] Urmaßstab abnehme, ableite, so könnte man sagen, ich machte ein Experiment, in dem ich herausfinde – – –

181[2] Wenn ich sage, wir experimentieren beim Rechnen, – dann natürlich nicht mit Zeichen, sondern mit uns selbst. Es ist dann ein psychologisches Experiment über das Erlebnis des Zustimmens.

RFM III 181[3] Aber interessiert Dich nicht eben an dieser Multiplikation, wie die Allgemeinheit der Menschen rechnen wird? Nein – wenigstens für gewöhnlich nicht – wenn ich auch zu einem gemeinsamen Treffpunkt mit eile. Aber die Rechnung zeigt mir doch eben, experimentell, welches dieser Treffpunkt ist. Ich lasse mich, gleichsam, ablaufen, & sehe wo ich hingelange. Und die richtige Multiplikation ist das Bild davon, wie wir alle ablaufen, wenn wir *so* aufgezogen werden.

RFM III 181[4] Die *Erfahrung* lehrt, daß wir Alle diese Rechnung richtig finden.

RFM III 181[5] & 182[1] Wir lassen uns ablaufen & erhalten das Resultat der Rechnung. Aber nun – will ich sagen – interessiert uns nicht, daß wir etwa unter diesen & diesen Bedingungen – dies Resultat erzeugt haben; uns interessiert das Bild des Ablaufs, aber nicht als das Resultat eines Experiments, sondern als ein *Weg*.

182[2] 22.02.1940

Wie wenn man sagte: Die Rechnung sei eine Reaktion, ein bedingter Reflex, – nicht eine Aussage über so einen Reflex.

182[3] Man könnte auch die Rechnung eine Reihe von Entscheidungen nennen & das Resultat eine Schlußentscheidung.

RFM III 182[4] Wir sagen nicht: “also *so* gehen wir!”, sondern: “also *so* geht es!”

182[5] Wenn Einer sagt: “das Resultat der Rechnung findet man experimentell”, so müßte man ihm antworten: “ja, wie soll er es *denn* finden?”

182[6] & 183a[1] Ist der Ausdruck einer Entscheidung ein Satz, der sagt, daß ich mich so entscheide? Der bewiesene Satz als Ausdruck einer Entscheidung.

183a[2] & 183b[1] Ich lasse mich ablaufen & das Ende des Ablaufs ist der bewiesene Satz. Aber *sagt* dann der Satz etwas über diesen Ablauf? Wir haben ein Experiment gemacht – aber im Experiment wurde ein *Satz* erzeugt (wie sonst etwa eine chemische Verbindung). Und nun gibt es einen andern Satz, der sagt, daß jener Satz erzeugt wurde. – Aber wie, wenn ich als Ausdruck hiefür eben jenen Satz gebrauchte? So daß also "$25 \times 25 = 625$" mir sagen soll, daß die Menschen, so & so abgerichtet, allgemein *dies* herausbringen. Nun, so eine Aussage gibt es doch, hat doch einen guten Sinn. Und wenn das so ist – könnte man fragen –, soll es dann wirklich *zwei* Sätze geben: einen, der dieses anthropologische Faktum ausspricht, das doch offenbar für den Sinn der Arithmetik wesentlich ist, & einen andern, der ein davon unabhängiges arithmetisches Faktum $25 \times 25 = 625$ aussprechen soll? Hier liegt der gewisse Unsinn nahe: "es kommt darauf an, wie wir den Satz *meinen*". Man kann aber sagen: es kommt drauf an, wie wir den Satz verwenden, was wir mit ihm tun.

183b[2] "Aber, daß 25×25 625 ist, ist etwas, was wir vor dem ausführen der Multiplikation nicht wußten." – Könnte ich nicht auch sagen: dieser Satz ist einer, dessen Beweis wir vorher nicht *kannten*. – – – [Soll *wissen* & *kennen* kontrastieren. Hängt auch damit zusammen; Wir wußten nicht nur nicht, *daß* dieser Satz (oder diese Zahl) herauskommen würde, sondern auch nicht *wie*, in welchem Sinne, er 'herauskommen' würde.]

183b[3] ‘Der Beweis schafft einen *Begriff*.’

183b[4] Wir sind Alle gleich gestimmt, wir laufen Alle gleich ab – – aber heißt das, daß wir diese Gleichheit des Ablaufs unbedingt nur dazu verwenden, den Ablauf des einen Menschen aus dem des andern vorherzusagen?

184a[1] Wer sagt, er sei neugierig, zu wissen, was die Multiplikation ... x ... ergeben wird, könnte sagen, er sei neugierig zu sehen, womit er (am Ende) übereinstimmen werde. – Das könnte aber ganz mißverstanden werden. –

RFM III 184a[2] Unsre Zustimmung läuft gleich ab, – aber wir bedienen uns dieser Gleichheit des Ablaufs nicht bloß, um Zustimmungsabläufe vorauszusagen. Wie wir uns des Satzes “dies Heft ist rot” nicht nur *dazu bedienen* um vorherzusagen, daß die meisten Menschen es ‘rot’ nennen werden.

RFM III 184a[3] & 184b[1] 23.02.1940

“Und das *nennen* wir doch ‘dasselbe’”. Bestünde keine Übereinstimmung in dem, was wir ‘rot’ nennen, etc., etc., so würde die Sprache aufhören. Wie ist es aber bezüglich der Übereinstimmung in dem, was wir “Übereinstimmung” nennen? Wir können das Phänomen einer Sprachverwirrung beschreiben; – aber welches sind für uns die Anzeichen einer Sprachverwirrung? Nicht notwendigerweise Tumult & Verwirrung im Handeln. Dann also, daß ich mich, wenn die Leute sprechen, nicht auskenne; nicht übereinstimmend mit ihnen reagieren kann.

RFM III 184b[2] ‘Das ist für mich kein Sprachspiel.’ Ich könnte dann aber auch sagen: Sie begleiten zwar ihre Handlungen mit Sprechlauten & ihre Handlungen kann ich nicht ‘verwirrt’ nennen, aber doch haben sie keine *Sprache*. – Vielleicht aber würden ihre Handlungen verwirrt, wenn man sie daran hinderte jene Laute von sich zu geben.

184b[3] Wir *können* wissenschaftlich voraussagen, was Menschen bei einer Rechnung herausbringen werden, indem wir selbst sie rechnen; – & das muß sehr wichtig sein.

RFM III 184b[4] Man könnte sagen: ein Beweis dient der *Verständigung*. Ein Experiment setzt sie voraus. Oder auch: Ein math. Beweis formt unsere Sprache.

RFM III 185[1] Aber es bleibt doch bestehen, daß man mittels eines math. Beweises wissenschaftliche Voraussagen über das Beweisen anderer Menschen machen kann. – Wenn mich Einer fragt: “Was für eine Farbe hat dieses Buch?” & ich antworte: “Es ist grün.” – hätte ich ebensowohl die Antwort geben können: “Die Allgemeinheit der Deutschsprechenden nennt das ‘grün’”? Könnte er darauf nicht fragen: “Und wie nennst *Du* es”? Denn er wollte meine Reaktion hören.

RFM III 185[2] ‘***Die Grenzen des Empirismus***’

RFM III 185[3] & 186[1] Wenn ich die Multiplikation rechne, – ist das Resultat: daß die Menschen allgemein damit übereinstimmen werden? Es gibt doch eine Wissenschaft von den konditionierten Rechenreflexen; ist das die Mathematik? Jene Wissenschaft wird sich auf Experimente stützen: & diese Experimente werden *Rechnungen* sein. Aber wie, wenn diese Wissenschaft recht exakt, & am Ende gar eine 'mathematische' Wissenschaft würde? Ist das Resultat dieser Experimente nun, daß (die) Menschen in ihren Rechnungen übereinstimmen, oder, daß sie darin übereinstimmen, was sie "übereinstimmen" nennen? Und das geht so weiter.

RFM III 186[2] Man könnte sagen: jene Wissenschaft würde nicht funktionieren, wenn wir in Bezug auf die Idee der Übereinstimmung nicht übereinstimmten.

RFM III 186[3] Es ist doch klar, daß wir ein mathematisches Werk zum Studium der Anthropologie verwenden können. Aber eines ist dann nicht klar: – ob wir sagen sollen: "diese Schrift zeigt uns wie bei diesem Volk mit Zeichen operiert wurde", oder ob wir sagen sollen: "diese Schrift zeigt uns, welche Teile der Mathematik dieses Volk beherrscht hat".

186[4] & 187[1] Ist meine Überzeugung, daß ich richtig gezählt, keine Ziffer ausgelassen, keine wiederholt habe, die Überzeugung, daß die Allgemeinheit so zählt? Gebrauche ich ein Wort – das Wort 'zählen', oder 'wiederholen', etc. – *auf Grund der Überzeugung*, daß die Allgemeinheit es so gebraucht?

187[2] Ich beginne eine Rechnung & bin neugierig, womit ich übereinstimmen werde; & die Rechnung zeigt es mir. (Das erinnert an die Relativitätstheorie.) Aber wie, wenn ich mich irrte, – indem ich etwas für Übereinstimmung hielte, was es nicht ist!

187[3] Spiralfedern sind so montiert, daß man sie um einen beliebigen meßbaren Winkel zusammendrehen & dann zurückschnellen lassen kann. Sie sind alle gleich abgestimmt, so daß sie, um den gleichen Winkel zusammengedreht, gleichlang brauchen, um in die Ruhelage zurück zu gelangen. Wir benützen diesen Apparat, u.a., um zu finden wie lange ein andrer gleichgestimmter brauchen wird einen gewissen Winkel zurückzulegen. (Ähnlich könnte man Menschen abstimmen, daß sie alle zu der gleichen Multiplikation gleichlang brauchen.)

RFM III 187[4] & 188[1] Kann ich, am Ende einer Multiplikation angelangt, sagen: "Also *damit* stimm' ich überein! –"? – Aber kann ich es bei einem *Schritt* der Multiplikation sagen? Etwa bei dem Schritt "2 × 3 = 6"? Nicht ebensowenig, wie ich, auf dies Papier sehend, sagen kann: "Also das nenne ich '*weiß*'!"?

RFM III 188[2] Ähnlich scheint mir der Fall zu sein, wenn jemand sagte: "Wenn ich mir ins Gedächtnis rufe, was ich heute getan habe, mache ich ein Experiment (ich lasse mich ablaufen) & die Erinnerung, die dann kommt, dient dazu mir zu zeigen, was Andere, die mich gesehen haben, auf die Frage, was ich getan habe, antworten werden."

RFM III 188[3] & 189[1]

Was geschähe, wenn es uns öfter so ginge, daß wir eine Rechnung machen & sie als richtig finden; dann rechnen wir sie nach & finden sie stimmt nicht: wir glauben, wir hätten früher etwas übersehen – wenn wir sie wieder nachrechnen scheint uns unsre zweite Rechnung nicht zu stimmen, usf. Sollte ich das nun ein Rechnen nennen, oder nicht? – Er kann jedenfalls nicht die Voraussage auf seine Rechnung bauen, daß er das nächste mal wieder dort landen wird. – Könnte ich aber sagen, er habe diesmal *falsch* gerechnet, weil er das nächste mal nicht wieder so gerechnet hat? Ich könnte sagen: wo *diese* Unsicherheit bestünde gäbe es kein Rechnen.

RFM III 189[2]

Aber ich sage doch anderseits wieder: 'wie man rechnet– so ist es richtig.' Es *kann* kein Rechenfehler in 12 × 12 = 144 bestehen. Warum? Dieser Satz ist unter die Regeln aufgenommen. Ist aber '12 × 12 = 144' die Aussage, es sei allen Menschen natürlich 12 × 12 so zu rechnen, daß 144 herauskommt?

RFM III 189[3] & 190[1]

24.02.1940

Wenn ich eine Rechnung mehrmals nachrechne, um sicher zu sein, daß ich richtig gerechnet habe, & wenn ich sie dann als richtig anerkenne, – habe ich da nicht ein Experiment wiederholt um sicher zu sein, daß ich das nächste mal wieder gleich ablaufen werde? – Aber warum soll mich dreimaliges Nachrechnen davon überzeugen, daß ich das vierte Mal ebenso ablaufen werde. – Ich würde sagen: ich habe nachgerechnet um sicher zu sein, 'daß ich nichts übersehen habe'. Die Gefahr ist hier, glaube ich, eine Rechtfertigung unsres Vorgehens zu geben, wo es eine Rechtfertigung nicht gibt & wir einfach sagen sollten: *so machen wir's*.

RFM III 190[2] Wenn Einer wiederholt ein Experiment anstellt, 'immer wieder mit dem gleichen Resultat', hat er dann zugleich ein Experiment gemacht, das ihn lehrt, *was* er 'das gleiche Resultat' nennen wird, wie er also das Wort "gleich" gebraucht? Mißt der, der den Tisch mit dem Zollstock mißt, auch den Zollstock? Mißt er dabei den Zollstock, so kann er den Tisch nicht messen.

RFM III 190[3] & 191[1] Wie, wenn ich sagte: "Wenn Einer den Tisch mit dem Zollstock mißt, so macht er dabei ein Experiment, welches ihn lehrt, was bei der Messung dieses Tisches mit *andern* Zollstaben herauskäme"? Es ist doch gar kein Zweifel, daß man aus der Messung mit *einem* Zollstab voraussagen kann, was die Messung mit andern Zollstäben ergeben wird. Und ferner– könnte man es nicht tun – daß dann unser ganzes System des Messens zusammenfiele. *Kein* Zollstab, könnte man sagen, wäre richtig, wenn sie nicht alle übereinstimmten. – Aber wenn ich das sage, so meine ich nicht, daß sie dann alle *falsch* wären.

191[2] Kann ich einen mathematischen Satz ersetzen durch den Satz: "Wenn ich Menschen gehörig aufziehe & sie (dann) von *diesem* Punkte ablaufen lasse, so werden sie so gut wie immer zu diesem Resultat gelangen."?

191[3] Der Philosoph muß sich vor nichts *mehr* hüten, als einen Knoten zu zerschneiden, oder einen Faden abzureißen. Er muß die Knoten alle *auflösen*.

191[4] & 192[1] Wer Arithmetik lernt– soll ich von dem sagen, er wird aufgezogen (konditioniert um dann richtig abzulaufen), oder: er lernt jene anthropologischen Wahrheiten über die Abläufe. Oder wird er zuerst aufgezogen & dann lernt er jene Wahrheiten?

RFM III 192[2] Das Rechnen verlöre seinen Sinn, wenn *Verwirrung* einträte. Wie der Gebrauch der Worte “grün” & “blau” seinen Witz verlöre. Und doch scheint es Unsinn zu sein, zu sagen, – daß ein Rechensatz *sage*, es werde keine Verwirrung eintreten. – Ist die Lösung einfach die, daß der Rechensatz nicht *falsch* werde, sondern nutzlos, wenn Verwirrung einträte? Sowie der Satz dies Zimmer ist 16 Fuß lang dadurch nicht *falsch* würde, daß Verwirrung in den Maßstäben & im Messen einträte. Sein Sinn, nicht seine Wahrheit basiert auf dem ordnungsgemäßen Ablauf der Messungen. (Sei aber hier nicht dogmatisch. Es gibt Übergänge, die die Betrachtung erschweren.)

RFM III 192[3] & 193[1] Wie, wenn ich sagte: der Rechensatz drückt die Zuversicht aus, es werde keine Verwirrung eintreten. – Dann drückt der Gebrauch aller Worte die Zuversicht aus, es werde keine Verwirrung eintreten.

193[2] Ich bin ein zweitrangiger Dichter. Wenn ich auch als Einäugiger König unter den Blinden bin. Und ein zweitrangiger Dichter täte *besser* daran, das Dichten aufzugeben. Auch wenn er damit unter seinen Mitmenschen hervorragt.

RFM III 193[3] Man kann aber dennoch nicht sagen, der Gebrauch des Wortes ‘grün’ besage, es werde keine Verwirrung eintreten, – weil dann der Gebrauch des Wortes “Verwirrung” wieder eben dasselbe über *dieses* Wort aussagen müßte.

RFM III 193[4] & 194[1] Wenn “25 × 25 = 625” die Zuversicht ausdrückt, wir werden uns immer wieder leicht dahin einigen können, daß der Weg, der mit diesem Satz endet, zu nehmen sei – wie drückt dann dieser Satz nicht die andere Zuversicht aus, wir würden uns immer wieder über *seinen* Gebrauch einigen können.

RFM III 194[2] Wir spielen mit den beiden Sätzen nicht das gleiche Sprachspiel.

RFM III 194[3] Oder kann man sowohl zuversichtlich sein, man werde dort die gleiche Farbe sehen wie hier – & auch, man werde die Farbe, wenn sie gleich ist, gleich zu benennen geneigt sein?

RFM III 194[4] Ich will doch sagen: Die Mathematik ist als solche immer Maß & nicht Gemessenes.

194[5] Ich erwarte, dort dieselbe Farbe zu finden, wie hier. Ich gehe hin & finde wirklich die gleiche Farbe. Sage ich: “Ja, ich hatte recht; ich nenne, was ich hier sehe, wirklich ‘die gleiche Farbe’.”? Ist also meine Erwartung erfüllt, weil ich mit diesen Worten auf das, was ich sehe, reagiere? Nein; hier sind verschiedene Sprachspiele.

194[6] & 195[1] Warum soll ich eine Multiplikation rechnen können nicht "*wissen*" nennen, "was herauskommt". Denn fragt mich jemand: "Weißt Du, was bei 732 × 345 herauskommt?" so antworte ich: "Ja; *das*." & fange an zu rechnen. Ich kann sagen: ich weiß das Resultat nur als Ende der Multiplikation.

195[2] Was ist das für ein Satz: daß sich das distributive Gesetz induktiv beweisen läßt? Oder: daß es sich aus der rekursiven Definition $a + (b + 1) = (a + b) + 1$ durch Induktion beweisen läßt?

RFM III 25.02.1940

195[3] Der Begriff des Rechnens schließt *Verwirrung* aus. – Wie, wenn Einer beim Rechnen einer Multiplikation zu verschiedenen Zeiten Verschiedenes herausbrächte & dies *sähe*, aber in der Ordnung fände? – Aber dann könnte er doch die Multiplikation nicht zu den Zwecken verwenden, wie wir es tun! – Warum nicht? Und es ist auch nicht gesagt, daß er dabei immer übel führe.

RFM III 196[1] Die Auffassung der Rechnung als Experiment kommt uns leicht als die einzig *realistische* vor.

RFM III 196[2] Alles andere – meinen wir – sei Gefasel. Im Experiment haben wir etwas Greifbares. Es ist beinahe, als sagte man: "Ein Dichter, wenn er dichtet, stellt ein psychologisches Experiment an; nur so ist es zu erklären, daß ein Gedicht Wert haben kann." Man verkennt das Wesen des '*Experiments*', – indem man glaubt, jeder Vorgang, auf dessen Ende wir gespannt sind, sei was wir "Experiment" nennen.

196[3] Ein Experiment hat eine Pointe. Wenn ich durch ein Fernrohr blicke so kann es geschehen, um die Bewegung eines Sterns zu beobachten; & auch: um meine Augen zu prüfen. Die Pointe des Experiments ist– einmal: 'etwas über die Bewegung der Sterne zu erfahren', einmal: ' etwas über meine Augen zu erfahren'. Aber erfahre ich denn nicht beides zugleich: indem ich doch mit meinen Augen diese Bewegung der Sterne sehe?

RFM III 197[1] Es scheint wie Obskurantismus, wenn man sagt, eine Rechnung sei kein Experiment. In gleicher Weise wie auch die Feststellung, die Mathematik *handle* nicht von Zeichen oder Schmerz sei nicht eine Form des Benehmens. Aber nur weil die Leute glauben, man behaupte damit die Existenz eines ungreifbaren, d.i. schattenhaften, Gegenstands neben dem uns Allen greifbaren. Während wir nur auf verschiedene Verwendungsweisen der Worte hinweisen. Es ist beinahe als sagte man: 'blau' müsse einen blauen Gegenstand bezeichnen – – der Zweck des Wortes wäre sonst nicht einzusehen.

197[2] Durch seinen Ausdruck "Gebiet des realen nicht Wirklichen" hat Frege seiner Sache sehr geschadet. Das Wort "Gebiet" ist so irreführend – wie das Wort "Gegenstand" auf Zahlen angewendet.

197[3] & 198[1] Daß ich ein Bild als Paradigma annehme, heißt nicht, daß ich seine Nützlichkeit behaupte.

198[2] Bedenke, den fluktuierenden Sinn des Wortes "Nützlichkeit".

198[3] “Experiment” nennen wir nur etwas innerhalb einem System von Handlungen. Aber das vergessen wir, wenn ein Vorgang, der wie ein Experiment aussieht, uns vor den Augen ist.

198[4] & 199[1] Inwiefern aber ist es dem Rechnen wesentlich, daß die Allgemeinheit der Menschen gleich rechnet? Inwiefern ist ihm also wesentlich, daß ich aus meiner Rechnung, die des Andern soll voraussagen können? Können wir uns denken, daß dies die einzige Verwendung des Multiplizierens, z.B., wäre? Das Rechnen wäre dann eine Art automatischen Sprechens (Assoziierens), der Zweck lediglich, zu erfahren, was der Andre unter gleichen Umständen sagt. Es gäbe dabei natürlich ein Kriterium der Gleichheit der Umstände & des Gesagten Und nun könnte es sein, daß der Andre zwar nicht das Gleiche, aber etwas aus dem Meinen nach einer gewissen Transformationsregel erhältliches sagte. Ich würde dann nach meinem automatischen Ablauf *berechnen*, was des Andern Ablauf sein wird. Das Rechnen gibt uns eine Vergleichs**methode**.

199[2] 26.02.1940

“Der Beweis muß übersichtlich sein” heißt: Im Beweis gibt es nicht (wie im Experiment) verborgene Vorgänge, die das Resultat, wir wissen nicht wie, hervorbringen. Und das ist eine *grammatische* Bemerkung! Wer dies nicht versteht, mißversteht sie.

199[3] Denken wir uns zu einem jeden Beweis einen Satz, der das logische Produkt aller Sätze des Beweises ist. Dann wäre der Beweis auch ein Beweis dieses Satzes. Und zwar hätte man, indem man den Satz liest, seinen Beweis gelesen.

200[1] Ich möchte die transformierende Tätigkeit des Beweisens als Tätigkeit zu einem andern Zweck, mit einem andern Nutzen als dem des Beweisens, auffassen.

200[2] 27.02.1940

Kann man sagen, daß jeder Beweis sich entweder schon-akzeptierter *Formen der Überlegung* bedient, oder solche Formen in den Gebrauch einführt?

200[3] & 28.02.1940
201[1]

Das Spiel mit den 3 Stößen pyramidenförmig geschlichteter Scheibchen. Es lehrt mich Einer die Technik die Scheibchen von einem Stoß auf einen andern zu übertragen so daß nie ein größeres auf einem kleineren zu liegen kommt. Ich lerne – scheint es – etwas Mathematisches. Aber warum? Doch wohl, weil ich eine mathematische Betrachtung daran anknüpfe. Diese Technik des Umformens könnte zu rein praktischen Zwecken gelehrt werden. Ich meine, etwa, zu baulichen. Und die Vorschrift, es dürfe nie eine größere Scheibe auf einer kleineren ruhen, könnte Gründe der Stabilität oder Festigkeit haben. – Wenn nun Einer findet, wie die Scheiben diesen Bedingungen entsprechend zu übertragen sind, d.h., diese Technik begründet, eine Regel gibt & sie lehrt, – lehrt er dann eine mathematische Technik?

201[2] Könnte man sich nicht denken, daß Einer vom Resultat der Addition

$$\begin{array}{r} 8271 \\ 9537 \\ 8321 \\ \underline{7204} \\ 33333 \end{array}$$

überrascht wäre: da er sich als das Resultat der Addition so *bunter* Zahlen nicht eine so *einförmige* Zahl erwartet hätte. – Und nehmen wir an, er hätte an der Addition ein ästhetisches Vergnügen, wie am Verlauf eines Musikstücks, so könnte das Entstehen jener Gleichförmigkeit aus dieser Buntheit die Pointe des Musikstücks sein, das, was uns *immer von neuem überrascht*.

201[3] Ich bin dumm, ich kann das Einfachste nicht ausdrücken. –

201[4] & 202[1] Die Technik jener Umformungen mit der verglichen, die uns Skolem lehrt um zum Distributiven Gesetz zu gelangen.

202[2] 29.02.1940

Was für eine Art Erfindung ist die Erfindung des Nonius?

202[3] Die Aufgabe jene Scheiben zu übertragen lautete: ‘Du mußt sie übertragen, *ohne* daß …’. Und kann man nicht vom Skolemschen Beweis sagen, er lehre uns, einen beliebigen Satz der Form ‘a + (b + c) = (a + b) + c’ bilden, ohne daß …? Also, er überzeuge uns davon, daß jeder beliebige solche Satz durch Anwendung bloß *dieser* Umformungen aus diesem Gebilde erhältlich ist.

202[4] ‘Man kann den Satz auch *so* einsehen.’ Dabei ruht der Blick nur auf *diesem* Satz, als (dem) Ziel des Beweises. Wir zielen nur auf diesen Satz, nicht auf die Flugbahn des Geschosses. Nicht *diese Flugbahn* wollen wir es zu jenem Punkt durchlaufen lassen; sondern es soll, gleichgültig wie, diesen Punkt erreichen. – Aber, *unter andern Umständen*, mag es gerade die Flugbahn sein, auf die’s uns ankommt.

202[5] & 203[1] Könnte ich nicht einen Beweis dafür geben, daß die beiden Zeilen des Induktionsschemas

$a + (b + (c + 1)) = (a + (b + c)) + 1$ $(a + b) + (c + 1) = ((a + b) + c) + 1 \}$

restlos, sozusagen, durch das Transformationsschema $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$ teilbar sind?

203[2] 01.03.1940

Der Beweis sähe so aus:

$a + (b + (c + 1)) = a + ((b + c) + 1); a + ((b + c) + 1) = (a + (b + c)) + 1$

etc.

203[3] Wenn man die Operation, die man hier mit der linken Seite einer Gleichung vornehmen muß, um die rechte zu erhalten, ‘τ’ nennt, so könnte man etwa schreiben:

$\tau 2 ‘ \{ a + (b + (c + 1)) \} = (a + (b + c)) + 1$ $\tau ’ \{ (a + b) + (c + 1) \} = ((a + b) + c) + 1 \}$

203[4] Sind die, die in der Logik (Mathematik) zu Widersprüchen gelangt sind, in *meinem* Sinne 'in Schwierigkeiten geraten'? (Newman) – Wenn man es so ansieht, daß der Kalkül vor ihren Augen zu schillern anfing, so möchte man das sagen.

RFM III 204[1] Ich habe ein Spiel erfunden– komme drauf, daß, wer anfängt immer gewinnen muß: Es ist also kein Spiel. Ich ändere es ab; nun ist es in Ordnung.

RFM III 204[2] Habe ich ein Experiment gemacht, & war das Ergebnis, daß, wer anfängt immer gewinnt? oder: daß wir so zu spielen geneigt sind, daß dies geschieht? Nein. – Aber das Resultat hattest Du Dir doch nicht erwartet! Freilich nicht; aber das macht das Spiel nicht zum Experiment.

RFM III 204[3] & 205[1] Was heißt es aber: Nicht wissen, *woran es liegt*, daß es immer so ausgehen muß? Nun, es liegt an den Regeln. – Ich will wissen, wie ich die Regeln abändern muß um zu einem richtigen Spiel zu gelangen. – Aber Du kannst sie ja z.B. *ganz* abändern –also statt Deinem, ein gänzlich anderes Spiel angeben. – Aber das will ich nicht. Ich will die Regeln im großen ganzen beibehalten & nur einen Fehler ausmerzen. – Aber das ist vag. Es ist nun einfach *nicht klar*, was als dieser Fehler zu betrachten ist.

RFM III 205[2] Es ist beinahe, wie wenn man sagt: Was ist der Fehler in diesem Musikstück? es klingt nicht gut in den Instrumenten. – Nun, den Fehler *muß* man nicht in der Instrumentation suchen; man *könnte* ihn in den Themen suchen.

RFM III 205[3] Nehmen wir aber an, das Spiel sei so, daß, wer anfängt immer durch einen bestimmten, einfachen, Trick gewinnen kann. Darauf aber sei man nicht gekommen; – es ist also ein Spiel. Nun macht uns jemand darauf aufmerksam; und es hört auf ein Spiel zu sein.

RFM III 205[4] Wie kann ich dies wenden, daß es mir klar wird? – Ich will nämlich sagen: "& es hört auf ein Spiel zu sein"– nicht: "& wir sehen nun, daß es kein Spiel war."

RFM III 205[5] & 206[1] Das heißt doch, ich will sagen, man kann es auch so auffassen: daß der Andre uns nicht auf etwas *aufmerksam gemacht* hat; sondern daß er uns statt unseres, ein andres Spiel gelehrt hat. – Aber wie konnte durch das neue das alte obsolet werden? – Wir sehen nun etwas anderes, & können nicht mehr naiv weiterspielen. Das Spiel bestand einerseits in unsern Handlungen (Spielhandlungen) auf dem Brett; und diese Spielhandlungen könnte ich jetzt so gut ausführen, als früher. Aber anderseits war dem Spiel doch wesentlich, daß ich blind versuchte zu gewinnen; & das kann ich jetzt nicht mehr.

RFM III 206[2] Nehmen wir an: die Menschen haben ursprünglich die 4 species in gewöhnlicher Weise gepflogen. Dann fingen sie an mit Klammerausdrücken zu rechnen, & auch mit solchen von der Form $(a - a)$. Sie bemerkten nun, daß, z.B., Multiplikationen vieldeutig wurden. Mußte sie das in Verwirrung stürzen? Mußten sie sagen: "Nun scheint der Grund der Arithmetik zu wanken"?

RFM III 206[3] & 207[1]

Und wenn sie nun einen Beweis der Widerspruchsfreiheit fordern, weil sie sonst bei jedem Schritt in Gefahr wären in den Sumpf zu fallen – was fordern sie da? Nun, sie fordern eine *Ordnung*. Aber war früher *keine* Ordnung? – Nun, sie fordern eine Ordnung, die sie jetzt beruhigt. – Aber sind sie also wie (kleine) Kinder & sollen nur eingelullt werden?

RFM III 207[2]

Nun, die Multiplikation würde doch durch ihre Vieldeutigkeit praktisch unbrauchbar – d.h.: für die früheren normalen Zwecke. Voraussagen, die wir auf Multiplikationen basiert hätten, träfen nicht mehr ein. (Wenn ich voraussagen wollte, wie lang eine Reihe von Soldaten ist, die aus einem Carré von 50 × 50 gebildet werden kann, käme ich immer wieder zu falschen Resultaten.) Also ist diese Rechnungsart falsch? – Nun, sie ist für *diese* Zwecke unbrauchbar. (Vielleicht für andre brauchbar.) Ist es nicht, wie wenn ich einmal statt zu multiplizieren dividierte? (Wie dies wirklich vorkommen kann.)

RFM III 207[3]

Was heißt das: "Du mußt hier *multiplizieren*, nicht dividieren!" –

RFM III 207[4] & 208[1]

Ist nun die gewöhnliche Multiplikation ein *rechtes* Spiel; ist es *unmöglich* auszugleiten? Und ist die Rechnung mit (a − a) kein rechtes Spiel – ist es unmöglich *nicht* auszugleiten?

RFM III 208[2]

(*Beschreiben*, nicht Erklären, ist, was wir wollen!)

RFM III 208[3]

Nun, wie ist das, wenn wir uns in unserm Kalkül nicht auskennen?

RFM III 208[4] Wir gingen schlafwandelnd den rechten Weg. – Aber wenn wir auch jetzt sagen: “jetzt sind wir wach”, – können wir sicher sein, daß wir nicht eines Tages aufwachen werden? (Und dann sagen: wir hatten also wieder geschlafen. –)

RFM III 208[5] Können wir sicher sein, daß es nicht *jetzt* Abgründe gibt, die wir nicht sehen? Wie aber, wenn ich sagte: Die Abgründe, in einem Kalkül, sind nicht da, wenn ich sie nicht sehe!

RFM III 208[6] Irrt uns jetzt *kein* Teufelchen? Nun wenn es uns irrt, so macht’s nichts. Was ich nicht weiß, macht mich nicht heiß.

RFM III 209[1] Nehmen wir an: Früher teilte ich manchmal so durch 3:

manchmal so:

und merkte es nicht. – Dann macht mich jemand darauf aufmerksam. Auf einen Fehler? Ist es unbedingt ein Fehler? Und unter welchen Umständen nennen wir es so?

209[2] Eine Beschreibung, nicht eine Erklärung (Newman), leitet hier zur Klarheit. [Vergessen, wie dieser Satz lauten soll.] Eine Beschreibung, nicht eine Erklärung [Newman], leitet hier zur Klarheit.

209[3] Uns fehlt der Überblick; nicht das kausale Verständnis. Uns fehlt der Überblick über verschiedene Fälle. Z.B. über die möglichen Fälle jenes Aufmerksam-machens & seiner Konsequenzen.

220[1] Könnte man sich nicht denken, daß Leute glaubten, die Division müßte kommutativ sein, da die Addition & Multiplikation es ist. Sie würden auch manchmal ba dadurch bestimmen, daß sie ab ausrechnen. Manchmal aber, wenn sie beide Divisionen tatsächlich ausrechnen falle ihnen die Unstimmigkeit auf, & sie sagen dann es bestehe ein Widerspruch. Einerseits *müsse* doch ab=ba sein, anderseits kommt doch wieder Verschiedenes heraus.

220[2] Dies wäre ein Beispiel davon: daß auf einem Wege das eine, auf dem andren etwas anderes herauskommt, & doch meine ich, es sollten beide dasselbe ergeben.

220[3] Der Ausdruck der philosophischen Konfusion: Wir wissen nicht, was wir darüber sagen sollen.

220[4] & 221[1] Ich weiß nicht, wie ich die Dinge zusammenstellen soll. Ich weiß z.B. nicht ob ich den Beweis unter die Experimente, die Mathematik unter die Spiele, die Widersprüche unter die Verwirrungen rechnen soll. Ob ich sagen soll, zwischen mathematischen & experimentellen Wahrheiten sei ein Gradunterschied, ob ich sagen soll ein neuer Beweis gebe dem Satz einen neuen Sinn. Ich kenne mich in den menschlichen Tätigkeiten, den Techniken des Gebrauchs der Wörter, der mathematischen Sätze, der Beweise nicht aus. Wenn ich sie beschreiben soll, so kann ich sie in keinem Sinne übersehen. Es ist, wie wenn ich ein winziges Gesichtsfeld & ein schlechtes Gedächtnis hätte, & nun, durch hin & her blicken, mich auf einer *großen* Landkarte auszukennen lernen sollte. Man würde in so einem Falle fortwährend Zusammenhänge vergessen, verkennen, sie langwierig suchen, wo sie nicht sind.

221[2] & 222[1] 02.03.1940

Er sagt mir: “Wenn Du anfängst, & dann immer *so* ziehst, so kannst Du immer gewinnen.” Zeige ich meinem Spielpartner diese Methode, so sagt er, das Spiel habe jetzt seinen Witz verloren. Es ist kein Spiel mehr. Aber wir können es *dadurch* wieder zum Spiel machen, daß wir festsetzen, wer anfängt müsse, ehe er zieht, würfeln, & das Ergebnis des Würfelns bestimmt, ob er jenen unfehlbaren Zug ausführen darf, oder nicht.

RFM III 222[2] $\sim f (f) = \Phi (f)$ Def. $\Phi (\Phi) = \therefore \sim \Phi (\Phi) \}$

Die Sätze “Φ(Φ)” & “~Φ(Φ)” scheinen uns einmal das Gleiche & einmal Entgegengesetztes zu sagen. (*Jenachdem wir ihn ansehen* scheint der Satz “Φ(Φ)” einmal zu sagen, ~ Φ(Φ), einmal das Gegenteil davon. Und zwar sehen wir ihn einmal an als das Substitutionsprodukt

Φ(f) | f Φ

ein andermal als:

f(f) | f Φ

RFM III 222[3] & 223[1] Wir möchten sagen: ‘heteronom ist nicht heteronom; also kann man es, nach der Definition, “heteronom” nennen.’ Und klingt ganz richtig, geht [English?] ganz glatt, & es braucht uns der Widerspruch gar nicht auffallen. Werden wir auf den Widerspruch aufmerksam, so möchten wir zuerst sagen, daß wir mit der Aussage, ξ ist heteronom, in den beiden Fällen nicht dasselbe meinen. Einmal sei es die unabgekürzte Aussage das andremal die nach der Definition abgekürzte. Wir möchten uns dann aus der Sache ziehen, indem wir sagen: “~Φ(Φ)=Φ1(Φ)”. ← Aber warum sollen wir uns so belügen? Es führen hier wirklich zwei *entgegengesetzte* Wege – zu dem *Gleichen*. Oder auch: – *es ist ebenso natürlich*, in diesem Falle ‘~Φ(Φ)’ zu sagen, wie ‘Φ(Φ)’. Es ist, der Regel gemäß, ein ebenso natürlicher Ausdruck, zu sagen C liege vom Punkte A rechts, wie, es liege links.

Dieser Regel gemäß – welche sagt, ein Ort liege in der Richtung des Pfeils, wenn die Straße, die in dieser Richtung beginnt, zu ihm führt.

RFM III 223[2] Sehen wir's vom Standpunkt der Sprachspiele an. – Wir haben ursprünglich das Spiel nur mit geraden Straßen gespielt. – – –

223[3] & 224[1] Hatte nicht Newman recht, wenn er sagte, in Widersprüche kommen, sei, in meinem Sinne, in Verwirrung geraten? *Wenn* wir uns nämlich in unserm Kalkül nicht auskennen–, ihn nicht überblicken können. – Denn ist das nicht ebenso, wie wenn ich nicht entscheiden kann, ob

und

die gleichen

oder verschiedene Figuren sind? Wenn ich sagen muß: "nun kenne ich mich nicht aus; die Figur flimmert mir vor den Augen"? Kann ich nicht ebenso sagen: Der Kalkül flimmert mir vor den Augen, ich kann ihn nicht übersehen. Ist es nicht eben, als rechnete man mit zu langen Zahlzeichen, kenne sich nicht aus, die Rechnungen führen zu 'widersprechenden' Resultaten, & man sage: ich muß eine Ordnung schaffen! d.h., einen übersichtlichen Kalkül.

224[2] & 225[1] Aber wie! – wenn eine *lange* Addition zu verschiedenen Malen verschiedene Resultate ergibt, so ist sie also wertlos; & *Erfahrung* lehrt mich also, ob etwas eine Rechnung ist, oder nicht! Und man kann also sagen: Rechnung ist es, wenn es richtig als Voraussage dessen funktioniert, was ein andermal herauskommen wird?

VB 225[2] Den richtigen Stil schreiben heißt, den Wagen genau auf's Geleise setzen.

225[3] Angenommen wir sagen: Rechnung ist es, wenn es eine gültige Voraussage begründet, dessen, was ein andermal herauskommen wird. – Richtiger wäre es zu sagen: Rechnung ist es, wenn es eine gültige Voraussage begründet, ich werde ein andermal ebenso gehen wollen.

225[4] & 226[1] Nehmen wir an 5 + 7 gebe zu verschiedenen Malen verschiedene Resultate. D.h., ich sei einmal geneigt *das*, einmal etwas andres zu sagen. Das könnte z.B. so geschehen, daß ich einmal 5 & 7 so sehe

einmal so

.

'Ich merke aber nicht den Unterschied' zwischen den beiden Überlegungen, sondern sage nur: manchmal 12, manchmal 11. Könnte ich nun sagen: "Erfahrung zeigt mir: die Rechnung wackelt – sie ist also nichts nutz"? Oder wie wäre es, wenn ich immer gesagt hätte "5 + 7 = 12" & plötzlich kommt mir vor, ich müßte sagen "5 + 7 = 11", ohne daß ich aber weiß, warum? Aber erstens könnte ich mir doch denken, daß der, der das Wackeln des Resultats von 5 + 7 merkt, es einfach hinnimmt, & ruhig so rechnet. *Muß* er denn sagen, eine Rechnung, die wackelt, sei nichts nutz? Und, zweitens, kann ich mir denken, daß, wer einmal 5 + 7 = 12 gesagt hat, nun *gegen* seine Neigung dabei bleibt.

226[2] Ich will – glaube ich – sagen: Er *müßte* nicht verwirrt werden; – er kann aber verwirrt werden.

226[3] Ist es *so*: – Wenn ich den unerhörten Fall annehme, daß Einer bei einer Rechnung einmal dies, einmal das herausbringt, ohne eine *Ahnung* zu haben, wie es geschehen konnte – warum soll ich dann nicht das Unerhörte annehmen, daß ihn das nicht beunruhigt?

227[1] Kann ich denn sagen: die Erfahrung lehre mich, ob ein Kalkül übersichtlich sei?!

RFM III 227[2] & 228[1] 03.03.1940

Könnte man sich etwa denken, daß, wo ich *blau* sehe, das bedeutet, daß der Gegenstand, den ich sehe, *nicht* blau ist – daß die Farbe die mir erscheint immer als die gilt, die *ausgeschlossen* ist. Ich könnte z.B. glauben, daß Gott mir immer eine Farbe zeigt, um zu sagen: Die *nicht*. Oder geht es so: Die Farbe, die ich sehe, sage mir bloß, daß diese Farbe in der Beschreibung des Gegenstands eine Rolle spielt. Sie entspricht nicht einem Satz, sondern nur dem Wort "*blau*". Und die Beschreibung des Gegenstands kann also ebensogut heißen: "er ist blau", als auch "er ist nicht blau". Man sagt dann: das Auge zeigt mir nur Bläue, aber nicht die Rolle dieser Bläue. – Wir vergleichen das Sehen der Farbe mit dem Hören des Wortes "blau", wenn wir das *Übrige* des Satzes nicht gehört haben.

RFM III 228[2] Ich möchte zeigen, daß man dahin geführt werden könnte, daß etwas blau ist, mit den Worten zu beschreiben, es sei blau & auch, es sei nicht blau. Daß wir also, unter der Hand, die Projektionsmethode so verschieben könnten, daß "p" & "~p" den gleichen Sinn erhalten. Wodurch sie ihn verlieren, wenn ich nicht etwas neues als Negation einführe.

RFM III 228[3] & 229[1] Ein Sprachspiel kann nun durch einen Widerspruch seinen *Sinn* verlieren, den Charakter des Sprachspiels. Und hier ist es wichtig zu sagen, daß dieser Charakter nicht dadurch beschrieben ist, daß man sagt, die Laute müssen eine gewisse *Wirkung* haben. Denn das Sprachspiel (1) würde den Charakter des Sprachspiels verlieren, wenn statt der 5 Befehle immer wieder andere Laute vom Bauenden ausgestoßen würden; auch wenn etwa physiologisch gezeigt werden könnte, daß immer wieder diese Laute es seien, die den Helfer dazu bewegen die Bausteine zu bringen, die er bringt.

RFM III 229[2] Auch hier könnte man sagen, daß freilich die Betrachtung der Sprachspiele ihre Wichtigkeit darin hat, daß Sprachspiele (tatsächlich) (immer wieder) funktionieren. Daß also ihre Wichtigkeit darin liegt, daß die Menschen sich zu einer solchen Reaktion auf Laute abrichten lassen.

RFM III 229[3] Damit hängt, scheint mir, die Frage zusammen, ob eine Rechnung ein Experiment ist zum Zweck Rechnungsabläufe vorauszusagen. Denn wie, wenn man eine Rechnung ausführte & – richtig – voraussagte, man werde das nächste mal anders rechnen, da ja die Umstände sich das nächste Mal schon dadurch geändert haben, daß man die Rechnung nun schon *so & so* oft mal gemacht hat.

RFM III 229[4] & 230[1] Das Rechnen ist ein Phänomen, das wir vom Rechnen her kennen. Wie die Sprache ein Phänomen, das wir von unserer Sprache her kennen.

RFM III 230[2] & 231[1] Kann man sagen: 'Der Widerspruch ist unschädlich, wenn er abgekapselt werden kann'? Was aber hindert uns, ihn abzukapseln? Daß wir uns im Kalkül nicht auskennen. *Das* also ist der Schaden. Und das ist es, was man meint, wenn man sagt: der Widerspruch zeige an, daß etwas in unserm Kalkül nicht in Ordnung sei. Er sei bloß das *Symptom* einer Krankheit des ganzen Körpers. Aber der Körper ist nur krank, wenn wir uns nicht auskennen. Der Kalkül hat eine heimliche Krankheit, heißt: was wir vor uns haben, ist, wie es ist, kein Kalkül, & *wir kennen uns nicht aus – d.h.*, wir können keinen Kalkül angeben, der diesem Kalkül-Ähnlichen 'im Wesentlichen' entspricht & nur das Falsche in ihm ausschließt.

RFM III 231[2] Aber wie ist es möglich, sich in einem Kalkül nicht auszukennen, liegt er denn nicht offen vor uns?! Denken wir uns den Fregeschen Kalkül mitsamt dem Widerspruch in ihm gelehrt. Nicht aber, indem man den Widerspruch als etwas Krankhaftes betrachtet. Er ist vielmehr ein anerkannter Teil des Kalküls, es wird mit ihm gerechnet. (Die Rechnungen dienen nicht dem gewöhnlichen Zweck logischer Rechnungen.) – Nun wird die Aufgabe gestellt, diesen Kalkül, von dem der Widerspruch ein durchaus wohlanständiger Teil ist, in einen andern umzuwandeln, in dem es diesen Widerspruch nicht geben soll, da man den Kalkül nun zu Zwecken verwenden will, die einen Widerspruch unerwünscht machen. – Was ist das für eine Aufgabe? Und was ist das für ein Unvermögen, wenn wir sagen: 'wir haben einen Kalkül, der dieser Bedingung entspricht, noch nicht gefunden'?

RFM III 231[3] & 232[1] Mit: "ich kenne mich in dem Kalkül nicht aus" – meine ich nicht einen seelischen Zustand, sondern ein Unvermögen etwas zu *tun*.

RFM III 232[2] Es ist oft zur Klärung eines philosophischen Problems sehr nützlich, sich die historische Entwicklung, in der Mathematik z.B., ganz anders vorzustellen, als sie tatsächlich war. Wäre sie anders gewesen, so käme oft niemand auf die Idee, zu sagen, was man tatsächlich sagt.

RFM III 232[3] Ich möchte etwas fragen, wie: "Gehst Du bei Deinem Kalkül auf Nützlichkeit aus? – dann erhältst Du auch keinen Widerspruch. Und wenn Du nicht auf Nützlichkeit ausgehst – dann macht es schließlich nichts wenn Du einen erhältst."

232[4] 04.03.1940

Der ist anders & *der* ist anders, also sind sie beide gleich.

RFM III 233[1] 05.03.1940

Unsre Aufgabe ist es nicht, Kalküle zu finden, sondern den *gegenwärtigen* Zustand zu beschreiben.

RFM III 233[2] Die Idee des Prädikats, das von sich selber gilt, etc., stützte sich freilich auf *Beispiele* – aber diese Beispiele waren ja *Dummheiten*, sie waren ja gar nicht ausgedacht. Aber das sagt nicht, daß solche Prädikate nicht verwendet werden könnten & daß dann nicht der Widerspruch seine Verwendung hätte! Ich meine, wenn man sein Augenmerk wirklich auf die Verwendung richtet, so kommt man gar nicht auf die Idee 'f(f)' zu schreiben. Anderseits kann man, wenn man die Zeichen im Kalkül, sozusagen, *voraussetzungslos* gebraucht, auch 'f(f)' schreiben, & muß dann die Konsequenzen ziehen & darf nicht vergessen, daß man von einer eventuellen praktischen Verwendung dieses Kalküls noch keine *Ahnung* hat.

RFM III 233[3] & 234[1] Ist die Frage die: "Wo haben wir das Gebiet der Brauchbarkeit verlassen?"? –

RFM III 234[2] Wäre es denn nicht möglich, daß wir einen Widerspruch hervorbringen *wollten*? Daß wir – mit dem Stolz auf eine mathematische Entdeckung – sagten: "Sieh, so erzeugen wir einen Widerspruch". Wäre es nicht möglich, daß, z.B., viele Leute versucht hätten, einen Widerspruch im Gebiet der Logik zu erzeugen, & daß es dann endlich *einem* gelungen wäre? Aber *warum* hätten Leute *das* versuchen sollen? Nun, ich kann vielleicht jetzt nicht den plausibelsten Zweck angeben. Aber warum nicht *z.B.*, um zu zeigen, daß alles auf dieser Welt ungewiß sei?

RFM III 234[3] Diese Leute würden dann Ausdrücke von der Form f(f) zwar nie wirklich verwenden, wären aber doch froh, daß sie in der Nachbarschaft eines Widerspruches lebten.

RFM III 234[4] & 235[1] “Sehe ich eine *Ordnung*, die mich verhindert, unversehens zu einem Widerspruch zu kommen?” Das ist so, wie wenn ich sage: Zeige mir eine Ordnung in meiner Technik, die mich überzeugt, daß ich auf diese Weise nicht einmal zu einer Zahl kommen kann, die kleiner als jene Zahl ist. Ich zeige ihm dann etwa einen Rekursionsbeweis.

RFM III 235[2] Ist es aber falsch, zu sagen: “Nun, ich gehe meinen Weg weiter. *Sehe* ich einen Widerspruch, so ist es Zeit, etwas zu machen.” – Heißt das: nicht wirklich rechnen? Warum soll das *nicht* Kalkulieren sein?! Ich gehe ruhig diesen Weg weiter; sollte ich zu einem Abgrund kommen, so werde ich versuchen, umzukehren. Ist das nicht ‘gegangen’?

RFM III 235[3] & 236[1] Denken wir uns folgenden Fall: Die Leute eines gewissen Stammes können nur mündlich rechnen. Sie kennen die Schrift noch nicht. Sie lehren ihre Kinder im Dezimalsystem zählen. Es kommen bei ihnen sehr häufig Fehler im Zählen vor, Ziffern werden wiederholt, oder ausgelassen, ohne daß sie es merken. Ein Reisender aber nimmt ihr Zählen phonographisch auf. Er lehrt sie die Schrift & schriftliches Rechnen, & zeigt ihnen dann wie oft sie sich beim bloß mündlichen Rechnen verrechnen. – Müssen diese Leute nun zugeben, sie hätten früher eigentlich nicht gerechnet? Sie wären nur herumgetappt, während sie jetzt gehen? Könnten sie nicht vielleicht sogar sagen: früher seien ihre Sachen besser gegangen, ihre Intuition sei nicht durch tote Mittel gehindert gewesen. Man könne den Geist nicht mit Maschinen fassen. Sie sagen etwa: “Wenn wir damals, wie Deine Maschine behauptet, eine Ziffer wiederholt haben, so wird es schon so recht gewesen sein.”

RFM III 236[2] & 237[1] Wir vertrauen, etwa, 'mechanischen' Mitteln des Rechnens oder Zählens mehr als unserm Gedächtnisse. Warum? – Muß das so sein? Ich mag mich verzählt haben, die Maschine, von uns einmal so & so konstruiert, kann sich nicht verzählt haben. Muß ich diesen Standpunkt einnehmen? – "Nun, Erfahrung hat uns (eben) gelehrt, daß das Rechnen mit der Maschine verläßlicher ist, als das mit dem Gedächtnisse. Sie hat uns gelehrt, daß unser Leben glatter geht, wenn wir mit Maschinen rechnen." Aber muß das Glatte unbedingt unser Ideal sein (muß es unser Ideal sein daß alles in Cellophan gewickelt sei)? Könnte ich nicht auch dem Gedächtnis trauen & der Maschine nicht trauen? Und könnte ich nicht der *Erfahrung* mißtrauen, die mir 'vorspiegelt', die Maschine sei verläßlicher?

VB 237[2] 06.03.1940

Wenn dieser Stein sich jetzt nicht bewegen will, wenn er eingekeilt ist, beweg' erst andre Steine, um ihn herum. –

VB 237[3] Wir wollen Dich nur richtig auf die Bahn setzen, wenn Dein Wagen schief auf den Schienen steht; fahren lassen wir Dich dann allein.

238[1] Ist der Beweis der Widerspruchslosigkeit ein Beweis der Brauchbarkeit des Kalküls? – Und ist, solange dieser Beweis nicht geliefert ist, unklar, ob der Kalkül brauchbar ist, oder unbrauchbar?

238[2] Ich *frage*: – könnte es nicht, auch wenn induktiv eine Widerspruchsfreiheit bewiesen ist, einen Widerspruch im Kalkül, sozusagen, in einer höheren Ebene geben? Ich meine: Kann der induktive Beweis nicht bloß eine Form des Widerspruchs eliminieren; & kann man nicht eine andre Form konstruieren, die dennoch möglich ist? Wenn es aber so ist, so heißt das nicht, daß der Beweis der Widerspruchsfreiheit wertlos ist; sondern nur, daß er Wert hat, *wo er praktischen Wert hat*. Wie ein Wegweiser. (S.d.)

238[3] & 239[1] Warum glaube ich aber, daß es möglich ist einen Widerspruch auf höherer Ebene zu konstruieren?? Ist das nicht, als wollte man sagen, es müsse möglich sein, auf einer höhern Ebene die Möglichkeit zu konstruieren, daß bei der Division 1 : 3 andre Ziffern als nur Dreier herauskämen? Also scheint es, daß was ich sage Unsinn ist.

239[2] 07.03.1940

Wenn man dieser Rechnung aber einen Oberbau gäbe, durch den noch eine andere Zahl als 0˙333 ... als Quotient gedeutet würde, so würde dies der ersten Rechnung natürlich in keiner Weise schaden. Könnte man aber zu unsrer Arithmetik einen kontradiktorischen Oberbau konstruieren, so könnte man es etwa so erscheinen lassen, als gefährdete dieser die Arithmetik.

RFM III 239[3] & 240[1] Mein Ziel ist mir unklar: Das Ziel dieser Bemerkungen (ist mir unklar). Denn ich kann mich doch *nach* dem Beweis der Widerspruchsfreiheit dort auskennen, wo ich mich vor dem Beweis nicht ausgekannt habe. So wie ich vor dem Beweis der zeigt, daß nur *diese* regelmäßigen n-Ecke mit Lineal & Zirkel konstruierbar sind, aufs Geratewohl solche Vielecke zu konstruieren versuchte, & es danach aufgab. Vorher war ich nicht sicher, daß unter den Arten des Multiplizierens, die *dieser* Beschreibung entsprechen, keine ist, die ein anderes Resultat, als das anerkannte, liefert. Nehmen wir aber an, meine Unsicherheit sei eine solche, die erst in einer gewissen Entfernung von den normalen Arten des Rechnens anfing; & nehmen wir an, wir sagten: Da schadet sie nichts, denn rechne ich auf sehr abnormale Weise, so muß ich mir eben alles noch einmal überlegen. Wäre das nicht ganz in Ordnung?

RFM III 240[2] Ich will doch fragen: *Muß* ein Beweis der Widerspruchsfreiheit (oder Eindeutigkeit) mir (unbedingt eine) größere Sicherheit geben, als ich ohne ihn habe? Und, wenn ich wirklich auf Abenteuer ausgehe, *kann* ich dann nicht auch auf solche ausgehen, in denen dieser Beweis mir keine Sicherheit mehr bietet?

RFM III 240[3] & 241[1] Mein Ziel ist, die *Einstellung* zum Widerspruch & zum Beweis der Widerspruchsfreiheit zu ändern. (*Nicht*, zu zeigen, daß dieser Beweis nur (etwas) Unwichtiges zeigt. Wie *könnte* das auch so sein!)

RFM III 241[2] 08.03.1940

Wäre es mir, z.B., daran gelegen, Widersprüche, etwa zu ästhetischen Zwecken zu erzeugen, so würde ich nun den Induktionsbeweis (der Widerspruchsfreiheit) unbedenklich annehmen & sagen: es ist hoffnungslos, in diesem Kalkül einen Widerspruch erzeugen zu wollen; der Beweis zeigt Dir, daß es nicht geht. (Beweis in der Harmonielehre.) – – –

241[3] & 242[1] Wie gesagt, der Beweis der Widerspruchsfreiheit ist ein Ordnungmachen. Es ist, wie wenn ich, z.B., die Lokomotiven, die eine Fabrik erzeugt, mit Namen versehen will, & sage: ich will ein System der Namengebung haben, das mich verhindert, einer neuen Maschine einen schon früher verwendeten Namen zu geben. (Ich entschließe mich dann etwa, die Maschinen zu *numerieren*.) Zu vergleichen wäre auch das Schaffen einer Ordnung in den Briefen & Akten einer Kanzlei. Jeder Brief wird beim Einlangen so & so bezeichnet, *sonst könnte es geschehen*, daß die & die Unordnung eintritt.

242[2] Ich könnte so, um eine Unordnung zu verhüten, den Beweis brauchen, daß es nur *eine* Primzahl-Zerlegung einer Zahl gibt.

242[3] Mein Ziel ist es, falsche Vergleiche zu vermeiden. Und das ist sehr schwer. Soll ich z.B. sagen: "Ich kann diesen Kalkül nicht gebrauchen; ich weiß nicht, ob er mich nicht vielleicht im Kreise führen wird"?

242[4] Wie, wenn ich im Beispiel des Namengebens sagte: “Mein Gedächtnis wird mich vielleicht im Kreise führen, darum verwende ich das System der Numerierung”. – Ja, “das Gedächtnis führt mich im Kreise”, das ist *klar* – aber, “der Kalkül führt mich im Kreise” –? – Heißt das: meine Inklination, die Regeln des Kalküls so & so zu gebrauchen? Oder ist hier der Kalkül ein Weg, *der schon gebaut ist*?

RFM III Es ist ein guter Ausdruck, zu sagen: “dieser Kalkül kennt diese
242[5] & Ordnung (diese Methode) nicht, dieser Kalkül kennt sie.” Wie,
243[1] wenn man sagte: “ein Kalkül, der diese Ordnung nicht kennt, ist eigentlich kein Kalkül”? (Ein Kanzleibetrieb, der diese Ordnung nicht kennt, ist eigentlich kein Kanzleibetrieb.)

RFM III Die Unordnung – möchte ich sagen – wird zu praktischen,
243[2] nicht zu theoretischen Zwecken vermieden.

RFM III Eine Ordnung wird eingeführt, weil man ohne sie üble
243[3] Erfahrungen gemacht hat – oder auch, sie wird eingeführt wie die Stromlinienform bei Kinderwagen & Lampen weil sie sich etwa irgendwo anders bewährt hat, & so der Stil oder, die Mode geworden ist.

RFM III Der Mißbrauch der Idee der *mechanischen* Sicherung gegen den
243[4] Widerspruch. Wie aber, wenn die Teile des Mechanismus mit einander verschmelzen, brechen oder sich biegen?

RFM III 09.03.1940

243[5] ‘Der Beweis der Widerspruchsfreiheit erst zeigt mir, daß ich mich dem Kalkül anvertrauen kann.’

RFM III 244[1] Was ist das für ein Satz: du kannst Dich dem Kalkül erst *dann* anvertrauen? Wenn Du Dich ihm aber nun *doch* anvertraust! – Welche Art von Fehler hast Du begangen?

RFM III 244[2] & 245[1] Ich mache Ordnung; ich sage: ‘es sind nur *diese* Möglichkeiten: …’. Es ist so, wie wenn ich die Zahl der möglichen Permutationen der Elemente A, B, C bestimme: ehe die Ordnung da war, hatte ich etwa nur einen ganz nebelhaften Begriff von der Menge der Möglichkeiten. Die Ordnung ist ein Mittel, keine Permutation zu übersehen, keine zu wiederholen. Es ist nun ganz sicher, daß ich nichts übersehen habe. – Aber so sicher, daß ich die ewige Seligkeit des Kalküls an diese Sicherheit hängen könnte? Ist nun sicher, daß Leute nie werden anders rechnen wollen? Daß Leute unsern Kalkül nie so ansehen werden, wie wir das Zählen der Eingeborenen, deren Zahlen (nur) bis fünf reichen? – daß wir die Wirklichkeit nie *anders* werden betrachten wollen? [Lessingisch] Aber *das* ist gar nicht die Sicherheit, die uns diese Ordnung geben soll. Nicht die ewige Richtigkeit des Kalküls soll gesichert werden.

RFM III 245[2] ‘Diese Möglichkeiten *meinst* Du doch! – oder meinst Du andre?’

RFM III 246[1] Die Ordnung überzeugt mich, daß ich mit diesen 8 Möglichkeiten keine übersehen habe. Aber überzeugt sie mich auch davon, daß nichts meine gegenwärtige Auffassung solcher Möglichkeiten wird umstoßen können?

RFM III 246[2] 10.03.1940

Könnte ich mir denken, daß man sich von einer Möglichkeit der 7-Ecks-Konstruktion ebenso fürchtete, wie vor der

Konstruktion eines Widerspruchs, & daß der Beweis daß die 7-Ecks-Konstruktion unmöglich ist eine beruhigende Wirkung hätte, wie der Beweis der Widerspruchsfreiheit?

RFM III 246[3] & 247[1] Wie kommt es denn, daß wir überhaupt versucht sind (oder doch in der Nähe davon) in $(3 - 3) \bullet 2 = (3 - 3) \bullet 5$ durch $(3 - 3)$ zu kürzen? Wie kommt es, daß dieser Schritt nach den Regeln plausibel erscheint, & wie kommt es, daß er dann dennoch unbrauchbar ist? Wenn man diese Situation beschreiben will, ist es ungeheuer leicht, in der Beschreibung einen Fehler zu machen. (Sie ist also sehr schwer zu beschreiben.) Die Beschreibungen, die uns sogleich in den Mund kommen sind (alle) irreleitend – so ist unsre Sprache eingerichtet.

RFM III 247[2] Man wird dabei auch immer vom Beschreiben in's Erklären fallen.

RFM III 247[3] & 248[1] & 249[1]

Es war, oder scheint *ungefähr* so: Wir haben einen Kalkül, sagen wir, mit Kugeln einer Rechenmaschine; ersetzen den durch einen Kalkül mit Schriftzeichen; dieser Kalkül legt uns eine Ausdehnung der Rechnungsweise nahe, die der erste Kalkül uns nicht nahegelegt hat – oder vielleicht besser: der zweite Kalkül *verwischt* einen Unterschied, der im ersten nicht zu übersehen war. Wenn es nun die Pointe des ersten Kalküls ist, daß dieser Unterschied gemacht werde & er im zweiten nicht gemacht wird so hat dieser damit seine Brauchbarkeit als Ersatz des ersten verloren. Und nun könnte das Problem entstehen – so scheint es –: *wo* haben wir uns von dem ursprünglichen Kalkül entfernt, welche Grenzen in dem neuen entsprechen den natürlichen Grenzen des alten? Ich habe ein System von Regeln eines Kalküls, die *beiläufig* nach einem andern Kalkül gemodelt waren. Ich habe mir ihn zum Vorbild genommen. Bin aber über ihn hinausgegangen. Dies war sogar ein Vorzug; aber nun wurde der neue Kalkül an gewissen Stellen (zum mindesten für die alten Zwecke) unbrauchbar. Ich suche ihn daher abzuändern: d.h., durch einen *einigermaßen* anderen zu ersetzen. Und zwar durch einen, der die Vorteile des neuen ohne die Nachteile hat. Aber ist das eine klar *bestimmte* Aufgabe? Gibt es – könnte man auch fragen – *den richtigen* logischen Kalkül, nur ohne die Widersprüche? Könnte man z.B. sagen, daß R's Theory of Types zwar den Widerspruch vermeidet, daß aber R's Kalkül doch nicht *der* allgemeine logische Kalkül ist, sondern etwa ein künstlich eingeschränkter, verstümmelter? Könnte man sagen, daß der *reine*, *allgemeine* logische Kalkül erst gefunden werden muß??

RFM III 249[2] & 250[1] Ich spielte ein Spiel & richtete mich dabei nach gewissen Regeln: aber *wie* ich mich nach ihnen richtete das hing von ⋎ Umständen ab & diese Abhängigkeit war nicht schwarz auf weiß niedergelegt. (Dies ist eine einigermaßen irreführende Darstellung.) Nun wollte ich dies Spiel so spielen, daß ich mich, 'mechanisch', nach Regeln richtete & ich 'formalisierte' das Spiel. Dabei aber kam ich an Stellen, wo das Spiel *jeden* Witz verlor; diese wollte ich daher 'mechanisch' vermeiden. – Die Formalisierung der Logik war nicht zur Zufriedenheit gelungen. Aber wozu hatte man sie überhaupt versucht? (Wozu war sie nütze?) Entsprang diese Idee nicht einer irrigen Auffassung?

RFM III 250[2] & 251[1] Die Frage "Wozu war sie nütze?" war eine durchaus *wesentliche* Frage. Denn der Kalkül war nicht für einen praktischen Zweck erfunden worden, sondern dazu, 'die Arithmetik zu begründen'. Aber wer sagt, daß die Arithmetik Logik ist; oder was man mit der Logik tun muß, um sie, in irgend einem Sinne, zum Unterbau der Arithmetik zu machen? Wenn wir etwa von ästhetischen Überlegungen dazu geführt worden wären, dies zu versuchen, wer sagt, daß es uns gelingen kann? (Wer sagt, daß sich dieses englische Gedicht zu unsrer Zufriedenheit ins Deutsche übersetzen läßt?!) (*Wenn* es auch klar ist; daß es zu jedem englischen Satz, in *einem* Sinne, eine Übersetzung ins Deutsche gibt.)

251[2] (Nur durch Erweiterung unsres Gesichtskreises können philosophische Probleme gelöst werden.)

RFM III Die Philosophische Unbefriedigung verschwindet dadurch,
251[3] daß wir *mehr* sehen.

RFM III Dadurch, daß ich das Kürzen durch (3 − 3) gestatte, verliert
251[4] das Rechnen seinen Witz. Aber wie, wenn ich z.B. ein neues Gleichheitszeichen einführte, das ausdrücken sollte: 'gleich, nach *dieser* Operation'? Hätte es aber einen Sinn zu sagen: "Gewonnen in *dem* Sinne", wenn in diesem Sinne *jedes* Spiel von mir gewonnen wäre?

RFM III Der Kalkül verleitete mich an gewissen Stellen zur Aufhebung
251[5] & seiner selbst. Ich will nun einen Kalkül, der dies nicht tut, &
252[1] schließe diese Stellen aus. – Heißt das nun aber, daß jeder Kalkül, in dem eine solche Ausschließung nicht erfolgt ist, ein unsicherer ist? 'Nun, die Entdeckung dieser Stellen war mir eine Warnung'. – Aber hast Du diese 'Warnung' nicht *mißverstanden*?!

RFM III 11.03.1940

252[2]

Kann man beweisen, daß man nichts übersehen hat? – Gewiß. Und muß man nicht vielleicht später zugeben: "Ja, ich habe etwas übersehen; aber *nicht* in dem Feld, wofür mein Beweis gegolten hat"?

RFM III 252[3] & 253[1] Der Beweis der Widerspruchsfreiheit muß uns Grund für eine Voraussagung geben; & das ist sein *praktischer Zweck*. Das heißt nicht, daß dieser Beweis ein Beweis aus der Physik unsrer Rechentechnik ist – also ein Beweis der angewandten Mathematik – aber daß die uns nächstliegende Anwendung, & die, um derentwillen uns an diesem Beweis liegt, jene Voraussagung ist. Die Voraussagung ist nicht: "*auf diese Weise* wird keine Unordnung entstehen" (denn das ist keine Voraussagung, sondern das ist der mathem. Satz) sondern: "es wird keine Unordnung entstehen".

VB 253[2] (Mörtel abkratzen ist viel leichter, als einen Stein zu bewegen. Nun, man muß das erste tun, bis man einmal das andre tun kann.)

RFM III 253[3] Ich wollte sagen: Der Beweis der Widerspruchsfreiheit kann uns nur dann *beruhigen*, wenn er ein triftiger Grund für jene Voraussage ist.

RFM III 253[4] 12.03.1940

Wo es mir genügt, daß bewiesen wird, daß ein Widerspruch, oder eine Dreiteilung des Winkels auf *diese* Weise nicht konstruiert werden kann, dort leistet der induktive Beweis, was man von ihm verlangt. Wenn ich mich aber fürchten müßte, daß irgend etwas, irgendwie, einmal als Konstruktion eines Widerspruchs gedeutet werden könnte, so kann kein Beweis mir diese unbestimmte Furcht nehmen.

254[1] Könnte ich etwa den induktiven Beweis des Distributiven Gesetzes geben, & dann einer bestimmten Zahl (sagen wir $100^{100} + 1$) eine solche Rolle in unsrer Arithmetik zuteilen, daß auf *sie* die Induktion nicht in der uns geläufigen Weise angewendet werden kann. An der Stelle $100^{100} + 1$ ist eben eine Unebenheit des Bodens, & *da* zeigt die Induktion, die über ihn gebreitet ist, natürlich auch eine Ungleichheit.

254[2] & 255[1] Wie kann man sagen, daß eine Kardinalzahl, etwa eine sehr hohe, nicht einmal ausgesondert werden wird, & man wird sagen: "die Menschen haben bis jetzt *geglaubt*, daß diese Gesetze für alle Kardinalzahlen gelten müssen, weil sie sich einfach von der Induktion leiten ließen; heute wissen wir, daß nicht *alle* Kardinalzahlen die gleiche Rolle in der Arithmetik spielen"? [Noch nicht gut.]

255[2] Ist es klar, daß, wenn ich einen Widerspruch gefunden habe, ich, immer, meinen bisherigen Kalkül desavouieren muß?

255[3] Ich fragte aber: "haben wir nicht die Warnung mißverstanden?" – d.h.: Verstehst Du nun wirklich, *wovor* Du Dich zu hüten hast; & *wie* Du Dich hüten sollst? (Wenn bei mir eingebrochen wurde, ist es unbedingt gut, z.B., Wachen vor mein Haus zu stellen? Machen sie das Haus unter allen Umständen sicherer?)

RFM III 255[4] Der Zaun den ich um den Widerspruch ziehe ist kein Über-Zaun.

RFM III 255[5] & 256[1] Wie konnte der Kalkül durch einen Beweis prinzipiell in Ordnung kommen? Wie konnte es kein rechter Kalkül sein, solange man diesen Beweis nicht gefunden hatte?

RFM III 256[2] ‘Dieser Kalkül ist rein mechanisch; eine Maschine könnte ihn ausführen.’ Was für eine Maschine? Eine die aus gewöhnlichen Materialien hergestellt ist– oder eine Über-Maschine? Verwechselst Du nicht die Härte einer Regel mit der Härte eines Materials?

256[3] ‘So hatte man bisher kalkuliert. Nun kam man auf einen Widerspruch. Da aber der Zweck des Kalküls ein ästhetischer war, so verleidete der Widerspruch den Menschen die Lust an dem Kalkül.’

RFM III 256[4] Wir werden den Widerspruch in einem ganz andern Lichte sehen, wenn wir sein Auftreten & seine Folgen, gleichsam, anthropologisch betrachten – als wenn wir ihn mit der Entrüstung des Mathematikers anblicken. D.h., wir werden ihn anders sehen, wenn wir nur zu *beschreiben* versuchen, wie der Widerspruch Sprachspiele beeinflußt; als wenn wir ihn vom Standpunkt eines mathematischen Gesetzgebers ansehen.

257[1] Die Einstellung der Mathematiker zum Widerspruch scheint mir, um es kraß auszudrücken, die der Hysterie & der Sensationslust. Freilich, vor allem, die der Verwirrung.

257[2] Gehe nur ruhig deinen Pfad weiter, – solange Du einen vor dir siehst. Er wird dich schon irgendwohin führen, wohin geführt zu werden wichtig war.

257[3] ‘Die Menschen entwickelten nun dieses Ideal des Kalküls.’ (Ein idealer Kalkül mußte für sie *so* ausschauen.)

257[4] & 258[1] 13.03.1940

‘Die Induktion läßt uns in die Ferne des Kalküls schauen.’ – Aber müssen wir uns nicht in acht nehmen, daß wir von diesem Bild nicht irregeführt werden? Durch ein Fernrohr sehen, ist von großem praktischem Wert. Wenn nämlich, was wir sehen, uns z.B. guten Grund gibt, das & das für die Zukunft zu erwarten. Sollten, im besondern Fall, die Umstände (es) bewirken, daß das Fernrohr uns nicht mehr lehrt, als das freie Auge, so würde es nun müßig durchs Fernrohr zu schauen.

RFM III 258[2] Aber halt! ist es nicht klar, daß niemand zu einem Widerspruch gelangen will? Daß also der, dem Du die Möglichkeit eines Widerspruchs vor Augen stellst, alles tun wird, um einen solchen unmöglich zu machen? (Daß also, wer das nicht tut, eine Schlafmütze ist.)

RFM III 258[3] Wie aber, wenn er antwortete: “Ich kann mir einen Widerspruch in meinem Kalkül nicht vorstellen. – Du hast mir zwar einen Widerspruch in einem andern gezeigt, aber nicht in *diesem*. In diesem *ist keiner* & ich sehe auch nicht die Möglichkeit.”

RFM III 258[4] “Sollte sich einmal meine Auffassung von dem Kalkül ändern; sollte, durch eine Umgebung, die ich jetzt nicht sehe, sich sein Aspekt ändern– dann wollen wir weiter reden.”

RFM III 260a[1] "Ich sehe die Möglichkeit eines Widerspruches *nicht*. So wenig, wie Du – scheint es – die Möglichkeit, daß in Deinem Beweis der Widerspruchsfreiheit einer ist."

RFM III 260a[2] Weiß ich denn, ob, wenn ich je einen Widerspruch dort sehen sollte, wo ich jetzt nicht die Möglichkeit eines Widerspruchs sehe, er mir dann gefährlich erscheinen wird?

260a[3] Ich habe die Situation des Sich-nicht-Auskennens in dem Kalkül, den man betreibt, noch ganz & gar nicht genügend beschrieben. – Vor allem die Situation, in der dieses sich nicht Auskennen nicht-erwünschte praktische Folgen hat.

260a[4] & 260b[1] 14.03.1940

Die Annahme sei: daß Menschen zum Rechnen mit Klammerausdrücken wie "(3 + 4)", "(4 + 7 − 9)", gekommen sind, dann auch mit Ausdrücken wie "(4 − 4)" rechnen & einmal eine Unstimmigkeit merken, d.h. merken, daß zwei nach den Regeln richtig gerechnete Multiplikationen *derselben* Zahlen, zwei verschiedene Resultate ergeben. Und zwar sind sie nun perplex, – sagen, es müßte doch dasselbe herauskommen, käme aber nicht heraus & sie wissen nicht, wie das kommt.

260b[2] (Wie ist das, wenn man sich in einem Stadtteil nicht auskennt? Nun: es ist da ein Geisteszustand, & gewisse Handlungsweisen. –)

260b[3] 15.03.1940

Schau durch ein Rohr, & versuch, Dich in einem Zimmer auszukennen, indem Du mit dem winzigen Gesichtsfeld um Dich schaust. So eine Tätigkeit ist die Tätigkeit Eines, der philosophiert.

260b[4] Denk Dir ich verwendete als Werkzeichnungen für Werkstücke die nach ihnen herzustellen sind nur Aufrisse der Dinge statt Auf– & Grundrisse. – In vielen Fällen nun führte das zu keiner Verwirrung (ohne daß ich mir aber davon eine Rechenschaft gäbe). Dann aber führt es plötzlich zu Verwirrungen & nun führe ich den Grundriß als notwendiges Supplement des Aufrisses ein.

260b[5] & 261[1] Kann ich nun die Sache nicht auf zweifache Art ansehen: einerseits so, – daß der Grundriß mich etwas neues gelehrt hat (daß etwas neues entdeckt wurde); anderseits, – daß, den Grundriß zeichnen & ablesen, eine neu erfundene Technik ist.

261[2] ‘Ohne Grundriß kann ich mich nicht auskennen; & der Aufriß allein ist überhaupt keine Darstellung des Objekts.’ – Doch – ich *kann* mich auskennen; aber manchmal kenne ich mich nicht aus & dann hilft mir der Grundriß, mich auskennen (obwohl auch er versagen kann).

261[3] & 262[1] Wie schaut nun die Verwirrung aus? Ich stelle Dinge her, vergleiche sie in gewohnter Weise mit der Zeichnung, sie stimmen mit ihr überein, aber nicht untereinander & das kann ich nicht verstehen. Aber was heißt es: ich kann es nicht verstehen? – Wie sieht *das* aus? – Nun, ich hatte sie mir *gleich* erwartet, aber sie sind es nicht. – Und ich sage mir, ich muß einen Fehler gemacht haben, & suche diesen Fehler in meinem Vergleichen, d.h., prüfe es wieder & wieder nach, – komme aber nicht vom Fleck. – Es ist also als hätte ich für einen rechten Handschuh das Maß genommen, nach genau diesen Maßen einen linken Handschuh zugeschnitten (& genäht), ich will ihn nun an die Hand ziehen & er paßt nicht. Ich aber sehe nun vergebens nach, wo ich mich vermessen, oder nicht dem Maß entsprechend zugeschnitten haben könnte. *Kenne* ich nun so eine Situation aus unsrer Erfahrung?! Ist es etwa die Situation des Wissenschaftlers, der eine Hypothese nicht bestätigt findet?

262[2] & 263[1] Es scheint: nicht ganz! – Denn der Fall, den ich mir dachte, war der, in welchem jener Mensch *verwirrt* ist; sagt: "Ich kenne mich nicht aus; es muß doch stimmen & stimmt nicht." Der Fall, in dem er sagt: "Ich muß einen Fehler gemacht haben, weiß aber absolut nicht, worin er liegt". Das ist also nicht der Fall des Wissenschaftlers, der verschiedene Hypothesen ausprobiert & mehr oder weniger bereit ist die eine zugunsten einer andern aufzugeben. (Anthropologisch sind die Fälle verschieden, möchte ich sagen.)

263[2] ('Aber ist ein wesentlicher Unterschied zwischen den Fällen?' Es ist ein *Unterschied*.)

263[3] Wir hätten uns natürlich auch den Fall denken können, in dem der Betreffende untersucht, ob er hier *diesen* Handschuh oder sein Spiegelbild anfertigen soll, & etwa findet daß der Handschuh (immer) dann paßt wenn er nach dem Maßnehmen zuerst eine Zeichnung herstellt, & dann nach deren Bild in einem Spiegel zuschneidet.

263[4] Der Unterschied zwischen der 'anthropologischen' & der mathematischen Darstellung ist der, daß wir in der ersteren nicht versucht sind von 'mathematischen Tatsachen' zu reden, daß vielmehr die *Tatsachen* in dieser Darstellung nie mathematische sind, nie *mathematische* Sätze wahr oder falsch machen.

263[5] & 264[1] Wenn nun aber jener Verwirrte die Entdeckung des rechten & linken Handschuhs machte. Was für eine Art Entdeckung wäre das? – Er hatte nicht entdeckt, daß das Spiegelbild seines Handschuhs paßt, sondern er hatte das Bild 'rechter & linker Handschuh' entdeckt. – Er hat es etwa tatsächlich *gezeichnet* (& zwar zum ersten Mal). Nun, – wenn einer etwas Neues zeichnet – entdeckt er etwas? Stellt er eben nicht etwas Neues her? – Aber entdeckt er dann nicht, *mittels* des neuen Bildes, daß es der rechte & nicht der linke Handschuh war, den er hätte machen sollen?

264[2] Wie ist es: kenne ich solche Verwirrungen? Sind sie sehr selten, oder *heute* sehr selten?

264[3] Wer Ordnung macht, wo früher Unordnung war, (der) führt ein neues Bild ein.

264[4] 16.03.1940

Fiktionen haben, wie wohlbekannt einen Platz in unsren Betrachtungen. Aber es sind alles materielle, behaviouristische, Fiktionen. Fiktionen, die sich ganz auf einer Bühne darstellen ließen.

264[5] & 265[1] 17.03.1940

Ich bin doch nur gegangen, wie zu gehen es natürlich war. Nun aber kreuzen sich zwei Tendenzen. Die Fortsetzung des Kalküls, die von *einem* Standpunkt aus natürlich ist, wird vom andern aus widernatürlich. Komme ich von *dort*, so möchte ich *so* fortsetzen, wenn von *dort*, dann unbedingt nicht so.

265[2] (Diese Tätigkeit gleicht nicht so sehr dem Zusammensetzen eines Jigsaw-Puzzles aus seinen Teilen; als dem Zusammensetzen einer *Reihe* solcher Puzzles (wovon einige komplett, andere unkomplett) aus Steinen, die alle in *eine* Kiste zusammengeworfen sind. Kein Wunder, wenn dies schwer gelingt.)

265[3] Es ist hier schwer, die verschiedenen Ebenen, auf denen wir uns bewegen, nicht zu verwirren; nicht, ohne daß wir's wissen, von der einen auf die andere zu geraten. (*Eine* Ebene ist die der Neigungen, so oder so den Kalkül fortzusetzen; eine andere Ebene, die der praktischen Brauchbarkeit, eine andere, die der Verwirrung & Klarheit.)

266[1] Man macht hier leicht einen Fehler wie den, zu denken, wenn auf der Netzhaut ein blinder Fleck ist, so müsse man ihn als Loch im Gesichtsfeld sehen.

266[2] & 267[1] 18.03.1940

Man erklärt die Entstehung gewisser Fabeln aus Naturmythen & die Entstehung dieser, aus dem natürlichen Trieb, die großen, immer widerkehrenden, Naturerscheinungen sich zu erklären. Und man redet, als sei nichts selbstverständlicher, als daß wir uns Erklärungen gerade dieser Naturerscheinungen geben, & auch daß diese Erklärungen von gerade dieser Art sind. Als hätten wir, wenn es nicht so wäre, uns nicht genug wundern können. Die Tatsache, daß diese Naturerscheinungen eine große Rolle in unserm Leben spielen, & daß sie immer wiederkehren, scheint (uns) die andern Tatsachen selbstverständlich zu machen. Dies drückt Jeans, sehr dumm aber sehr charakteristisch, so aus: "Primitive man must have found nature singularly puzzling & intricate." (‘*Must* have’ – besonders, da wir ja wissen, daß sich jeder Bauer den Kopf darüber zerbricht, warum die Sonne auf- & untergeht, & warum der Regen aus den Wolken fällt, etc.!)

RFM III 267[2] 19.03.1940

‘Was lehrt mich ein Beweis, abgesehen von seinem Resultat?’ – Was lehrt mich eine neue Melodie? Bin ich nicht in Versuchung zu sagen, sie *lehre* mich etwas? –

RFM III 267[3] Die Rolle des Verrechnens habe ich noch nicht klar gemacht. Die Rolle des Satzes: "Ich muß mich verrechnet haben". Sie ist eigentlich der Schlüssel zum Verständnis der ‘Grundlagen’ der Mathematik.

267[4] & 268[1] Sowenig, eine Handlung ‘gut’ nennen & danach handeln & urteilen, heißt, sie *nützlich* nennen – obwohl oft das offenbar Nützliche gut genannt wird & was wir gutheißen als irgendwie nützlich dargestellt wird – sowenig heißt eine Rechnung *annehmen* (sie für eine *richtige* Rechnung erklären): sie für eine *nützliche* Rechnung erklären. Obwohl ein *enger* Zusammenhang besteht zwischen dem Finden der Nützlichkeit oder Nutzlosigkeit einer Rechnung & dem Annehmen oder Ablehnen des Kalküls. Aber die beiden sind verschiedene anthropologische Phänomene, so wie das Gutheißen & das als nützlich Entdecken von Handlungen. (Die verschiedenen ‘Ebenen’.) (Diese Bemerkung sagt natürlich nicht, ‘gut’ sei *undefinierbar*.) Es macht auch nichts, daß ich, was unter Nützlichkeit zu verstehen ist, nicht näher erklärt habe.

268[2] (Der Meuchelmörder wird verachtet obwohl er a) klüger gehandelt hat, als der Mörder, der sich einem Kampf aussetzt, b) menschenfreundlicher, indem er seinem Opfer die Todesangst erspart hat.)

268[3] Ideen flackern zwar in mir auf, aber sie sind lange nicht stark genug, um einen Sieg gegen die Finsternis zu erringen.

269[1] Ich bin offenbar heutzutage nicht stark genug oder nicht mehr stark genug, um diese Angelegenheit klar zu übersehen. Ich brauchte ein neues Bild, um sie zu überblicken. Gegenwärtig komme ich nur außer Atem, wenn ich die Sache betrachte. Ich kann nicht Ordnung machen.

269[2] 20.03.1940

Die Beschreibung, welche ich geben sollte ist ähnlich dieser: 'Welche Erfahrungen hätte ein Mensch, der sein Leben unter den & den seltsamen Umständen (etwa, ganz auf einem Ringelspiel) zubrächte, & wie könnte er diese Erfahrungen darstellen?' Es ist hier erstens schwer nicht mit unsern eigenen Augen (d.h., von unserm eigenen Standpunkt) zu sehen, zweitens nicht zu übersehen, daß wir selbst uns ja in einer ähnlichen Lage, relativ zu einem andern Beschauer, befinden. Was er erlebt wird also einerseits äußerst seltsam, anderseits ganz gewöhnlich sein. D.h., es wird auf den ersten Blick abenteuerlich erscheinen, dann aber, von ganz gewöhnlicher Art, nur im Besondern verschieden.

270[1] Der Mann, der das Schiff, dessen Passagier er sein will, selbst ziehen hilft & sich plagt, damit es rascher vom Fleck kommt (Hebel: "Bequeme Schiffahrt, wer's dafür halten will") – hat er einen Irrtum begangen? Man möchte sagen: er tut etwas *närrisches*. Hätte er aber z.B. lieber *ziehen*, als sein Felleisen *tragen* wollen, so wäre es vernünftig gewesen. Man kann, was er tut, als Irrtum auffassen, als vernünftig & als unsinnig.

270[2] 27.03.1940

Wenn man nicht voraussagen kann, ob & an welcher Stelle in der Entwicklung von π drei Siebner nach einander stehen werden, ist das ähnlich, wie wenn man eine Mondesfinsternis nicht voraussagen kann? Die beiden Voraussagen scheinen von ganz verschiedener Art zu sein. Die erste, kann man sagen, sei nicht eine zeitliche Voraussage.

270[3] & 06.04.1940

271[1] Fühle mich übel; mein Kopf unfähig & verwirrt, als wären nie Gedanken in ihm gewesen. Voll Furcht, meine Arbeit werde teils verloren gehen, teils gestohlen werden. Neid gegen Jüngere, Furcht vor der Zukunft. In meinem Kopf sieht es *winterlich* aus; als seien die letzten grünen Pflanzen gestorben & die Erde sähe einer langen Periode der Öde entgegen.

271[2] 18.04.1940

Welcher Fall ist es, wenn man sagt: ich brauche hier einen Kalkül von dieser & dieser Art? Z.B.: ich suche eine Weise zu berechnen ob eine Zahl durch 7 teilbar ist, die kürzer sein soll, als die Division durch 7 selbst. – Was suche ich in einem solchen Fall? Ist, was ich suche irgendwie zu vergleichen mit dem Kalkül der eine physikalische Erscheinung erklären soll? Man könnte doch sagen: ‘Ich will mit meinem Kalkül das Resultat des Dividierens voraussagen.’

271[3] & 272[1] 07.06.1940

Meine Nerven sind seit zwei Monaten in *sehr* üblem Zustand: *Zu wenig Schlaf*; & Sorge & (unnötige) Aufregung. *Keine* zusammenhängenden Gedanken! Was ich brauchte wäre ein Monat vollkommene Stille, ich meine: keine *Menschen* hören. Die ekelhafte Mittelklasse hier und ihr Treiben ist mir besonders auf die Nerven gegangen. In gewissem Sinne bin ich selbst Schuld daran, denn ich habe nicht Mut noch Kraft mich ihr entgegenzustellen. Mit meiner ‘Moral’ schaut’s übel aus.

272[2] 13.06.1940

Noch immer unfähig zu arbeiten. Furchtbar empfindlich gegen jeden Lärm, besonders Lachen, Sprechen & Singen von Studenten. Der Krieg affiziert meine Nerven, auch habe ich allerlei *fruchtlose* Sorgen für die Zukunft. – Sehe K ein- bis zweimal die Woche; bin aber zweifelhaft darüber, inwieweit das Verhältnis das Richtige ist. Möge es wirklich gut sein.

272[3] 15.06.1940

Meine Nerven wieder besonders schlecht. Bis gegen Abend beschleunigten Puls, Schwindelgefühl & außerordentliche Müdigkeit & Schwäche. Abends normal. Versuche Adalin als Schlafmittel; vielleicht schlechte Folgen. Möge ich genesen!

272[4] & 273[1] 16.06.1940

Hutt bei mir. War froh ihn zu sehen, aber dennoch den größten Teil des Tages in *schlechtem* Zustand. Unterleibsschmerzen. Schwäche, Angst, raschen Puls.