Wittgenstein's Writings

Ms-122

Ms-122

Ludwig
Wittgenstein

FCv[1]

Philosophische Bemerkungen XVIII.

1r[1] & 1v[1] 16.10.1939

Das Paradox “Heterologisch”: Es ist gut sich vorzustellen, daß die Wörter “heterologisch” & “homologisch” irgendwo wirklich Wörter der lebendigen Sprache sind. Stellen wir uns vor, in der Schrift des Stammes … wird das Wort für rot immer mit roter Tinte, das Wort für blau immer mit blauer Tinte geschrieben, ein Wort das lang bedeutet wird immer langgezogen, eines das kurz bedeutet zusammengepreßt. Dagegen muß bei ihnen das Wort für heiß nicht heiß & das Wort für kalt nicht kalt sein etc. Ihre Grammatiker reden von homologischen & heterologischen Wörtern. Jemand von ihnen fragt nun: “ist das Wort “heterologisch” heterologisch, oder nicht?” & leitet das Paradox ab. Oder, er leitet das Paradox nicht ab & fragt im vollen Ernst. Ich (der Gefragte) denke mir: “Was fragt er eigentlich? Er fragt, ob “h” die Eigenschaft hat, die Eigenschaft nicht zu haben, die es bedeutet, welche ist: die Eigenschaft nicht zu haben, die es bedeutet, welche aber (die) ist: die Eigenschaft nicht zu haben, die es bedeutet u.s.f.”

1v[2] Das ist ja als sagte man Einem: “Schreib etwas anderes”, ohne aber zu sagen *wovon* es verschieden sein soll.

1v[3] & 17.10.1939

2r[1] Auf die Frage “Ist “h” h?” sagen wir uns sofort: “Nun, wir wollen sehen – – was heißt denn ‘h’?” D.h. wir sind nicht gleich klar, zu welchem Resultat hier die Erklärung von “h” führt. Und gleich darauf sehen wir, daß sie zu keinem Resultat führt. Denn das Resultat ist zwar: h (‘h’) = ~h (‘h’), aber, abgesehen davon, daß das ein Widerspruch ist, so ist es keine Erklärung von “h (‘h’)”. Und ebenso erhalte ich auch *keine* Erklärung, wenn ich mir überlege, was “hom (‘hom’)” bedeutet.

2r[2] & 2v[1] Es wird hier mittels eines Satzes & einer Definition ein Kreis geschlossen, & so, daß die Definition ohne den Satz & der Satz ohne die Definition nicht vollständig ist – wodurch man auf der Suche nach der Bedeutung im Kreis herum geführt wird.

2v[2] & 3r[1] Ebenso, wie man durch die Definition $\sim f(f) = S(f)$ zum Widerspruch $\sim S(S) = S(S)$ geführt wird, aber das Zeichen “S(S)” aus der Definition auch nicht erklären kann. Ich könnte es etwa so *versuchen*: Wenn man statt ‘f’ ‘S’ einsetzt so muß man wissen für welchen Ausdruck nach der Definition das S stehen soll. Am ehesten noch für “$\sim \xi(\xi)$” oder “~ ( )”. Also heißt “S(S)” soviel wie “S(~ ( ))”, aber nicht “~ ( )(~ ( ))”: denn zur Ersetzung des S vor seinem Argument soll ja nach der Definition so verfahren werden: ~[~ ( )][~ (])

3r[2] Schreiben wir eine Funktion als ein Verbum & sagen z.B. statt “F(a)”: “a F-iert”. Also: ~ (f f-iert) = f S-iert Def. Ersehen wir daraus, was wir für einen Ausdruck von der Art “S ϕ-iert” schreiben sollen?

3r[3] Denken wir uns einen Kalkül mit einem Widerspruch drin aber wir *merken* den Widerspruch nicht. Wir leiten allerlei Sätze ab, die, wie wir später sehen, mit einander im Widerspruch stehen. Wenn uns ein Teufel narrt so daß wir es nie merken, – was werden wir sagen?

3v[1] Was hindert mich zu sagen: Ich nenne etwas nicht "Kalkül", wenn ihm nicht ein Induktionsbeweis beigefügt ist, der zeigt, daß man in ihm nicht Gebilde von einer gewissen Form erzeugen kann?

3v[2] 18.10.1939

Ich will der Formulierung entgehen: "ich weiß jetzt mehr über den Kalkül", & statt ihrer die setzen: "ich habe jetzt einen andern Kalkül". Der Sinn hiervon ist, die Kluft zwischen einem mathematischen Wissen & nichtmathematischem Wissen immer in ihrer vollen Größe vor Augen zu behalten.

4r[1] & 4v[1] Angenommen, in einem Stamm führen sie Rechnungen der vier Spezies aus & hie & da verwenden sie einen Übergang von der Art

$(3 - 3) \bullet 4 = (3 - 3) \bullet 5.$

Sie erhalten daher manchmal widersprechende Resultate – wie wir sagen würden. Das stört sie aber durchaus nicht. Man könnte sich auch den Fall denken, daß Menschen jenen Übergang nur in gewissen Notfällen gebrauchen; wenn eine Rechnung in irgend einem Sinn nicht stimmen will, & stimmen *muß*. Ein solches Rechnen wäre ähnlich gewissen gebräuchlichen Schlußweisen, durch die irgendeine Annahme (manchmal religiöser Art) gestützt wird, mögen die Fakten auf die sie gestützt wird nun so, oder umgekehrt ausschauen.

4v[2] 19.10.1939

$4 \times (2 \times 2 = 4) = (8 \times 2 = 16)$ $4 \times (4 \times \xi) = 16 \times \xi$ Vierfach ist ein Vierfaches.

4v[3] Jede mathematische Erfindung (z.B. jeden Beweis) muß man sich wegdenken können & sehen was dann von der Mathematik noch bleibt.

4v[4] & 5r[1] Man muß sich immer wieder eine mathematische Entdeckung wegdenken – & sehen, was dann von der Mathematik bleibt – – oder, *was für eine* Mathematik dann zurückbleibt. – Denn es bleibt (dann) ein Spiel zurück, mit anderer Pointe vielleicht, (&) manchmal gleichsam ein Embryo einer Mathematik – aber wir können es doch als einen Kalkül, als eine Art des Rechnens, auffassen, & dies entzieht uns der Gefahr uns von den 'Denkgesetzen' eine viel zu enge Vorstellung zu machen.

RFM III 25.10.1939

5r[2] & 5v[1] 'Ein Mathematischer Beweis muß übersichtlich sein.' "Beweis" nennen wir nur eine Struktur, deren Reproduktion eine leicht lösbare Aufgabe ist. Es muß sich mit Sicherheit entscheiden lassen, ob wir hier wirklich zweimal den gleichen Beweis vor uns haben, oder nicht. Der Beweis muß ein Bild sein, welches sich mit Sicherheit genau reproduzieren läßt. Oder auch: was dem Beweise wesentlich ist muß sich mit Sicherheit genau reproduzieren lassen. Er kann z.B. in zwei verschiedenen Handschriften oder Farben niedergeschrieben sein. Zur

Reproduktion eines Beweises soll nichts gehören was von der Art einer genauen Reproduktion eines Farbtones oder einer Handschrift ist.

RFM III 5v[2] & 6r[1] & 6v[1] Es muß leicht sein *genau* diesen Beweis wieder anzuschreiben. Hierin liegt der Vorteil des Geschriebenen im Vergleich zum gezeichneten Beweis. Dieser ist oft seinem Wesen nach mißverstanden worden. Die Zeichnung eines Euklidischen Beweises kann ungenau sein, in dem Sinne, daß die Geraden nicht gerade sind die Kreisbögen nicht genau kreisförmig etc. etc. & dabei ist die Zeichnung doch ein exakter Beweis & dies zeigt daß diese Zeichnung nicht – z.B. – demonstriert daß eine solche Konstruktion ein Vieleck mit 5 gleichlangen Seiten ergibt, daß sie einen Satz der Geometrie, nicht einen über die Eigenschaften von Papier, Zirkel, Lineal & Bleistift beweist.

6v[2] Wäre dies ein Beweis:

Man schreibt |||||||| + |||||||| = |||||||||||||||| & wägt (dann) die Tinte auf den beiden Seiten der Gleichung; wiegt sie gleichviel, so ist die Gleichung richtig. Nun, diese Wägung könnte uns sehr wohl als Beweis d.h. als Kriterium dafür dienen, daß auf den beiden Seiten dieser individuellen (token) Gleichung gleichviel Striche stehen, aber sie wäre kein Beweis der Additionsformel im Sinne der Mathematik, sondern ein Experiment eines nicht-mathematischen Satzes.

RFM III 6v[3] & 7r[1] 27.10.1939

Ich will sagen: Wenn man eine nicht übersichtliche Beweisfigur durch Veränderung der Notation übersehbar macht, dann schafft man erst einen Beweis, wo früher keiner war.

RFM III 7r[2] Denken wir uns nun einen Russellschen Beweis für einen Additionssatz der Art a + b = c der aus ein paar tausend Zeichen bestünde. Du wirst sagen: Zu sehen, ob dieser Beweis stimmt, oder nicht, ist eine rein äußerliche Schwierigkeit, die von keinem mathematischen Interesse ist. ("Ein Mensch übersieht leicht, was ein anderer schwer oder garnicht übersieht"– etc. etc.)

7r[3] & 7v[1] Wir stellen fest daß in der Stadt A 5 Millionen Menschen sind & in der Stadt B 3 Millionen. Wir rechnen daß wir für beide 5 Millionen Gasmasken brauchen & richten unsre Fabrik so ein daß sie diese Zahl herstellt. Wir finden daß die entsprechende Menge erzeugt worden ist. So war also die Rechnung in diesem Fall sehr nützlich. Und es ist merkwürdig, daß die Russellsche Logik in dieser Weise nützlich sein kann. Oder ist es bloßer Zufall, daß sie es in solchen Fällen so oft ist?

RFM III 7v[2] Die Annahme ist, daß die Definitionen nur zur Abkürzung des Ausdrucks dienen, zur Bequemlichkeit des Rechnenden; während sie doch ein Teil der Rechnung sind.

Mit ihrer Hilfe werden Ausdrücke erzeugt, die ohne ihre Hilfe nicht erzeugt werden könnten.

7v[3] & 8r[1] 28.10.1939

Vielleicht sagt man, daß mit ihrer Hilfe nur Aspekte von Ausdrücken *hervorgehoben* werden. Aber was heißt 'einen

Aspekt hervorheben' anderes, als einen neuen Ausdruck erzeugen.

RFM III 8r[2] & 8v[1] Wie ist es aber damit: “Man kann zwar im R'schen Kalkül nicht 234 mit 537 multiplizieren – im gewöhnlichen Sinn – aber es gibt eine R'sche Rechnung die dieser Multiplikation entspricht”? – Welcher Art ist diese Entsprechung? Es könnte so sein:

Man kann auch im R'schen Kalkül diese Multiplikation ausführen nur in einem andern Symbolismus – wie wir ja auch sagen würden wir könnten sie auch in einem andern Zahlensystem ausführen. Wir könnten dann also z.B. die praktischen Aufgaben, zu deren Lösung man jene Multiplikation benützt auch durch die Rechnung im R'schen Kalkül lösen, nur umständlicher.

RFM III 8v[2] & 9r[1] Denken wir uns nun die Kardinalzahlen erklärt als 1, 1 + 1, (1 + 1) + 1, ((1 + 1) + 1) + 1, u.s.f.. Du sagst, die Definitionen welche die Ziffern des Dezimalsystems einführen dienen bloß zur Bequemlichkeit; man könnte die Rechnung 703000 × 40000101 auch in jener langwierigen Schreibweise ausführen. Aber stimmt das? – “Freilich stimmt es! Ich kann doch eine Rechnung in jener Notation anschreiben, konstruieren, die der Rechnung in der Dezimalnotation entspricht.” – Aber wie weiß ich, daß sie ihr entspricht? – Nun, weil ich sie nach einer gewissen Methode aus der andern abgeleitet habe. – Aber wenn ich sie nun nach einer halben Stunde wieder anschaue, kann sie sich da nicht verändert haben? Sie ist ja nicht übersehbar.

RFM III Ich frage nun: könnten wir uns von der Wahrheit des Satzes
9r[2] 7034174 + 6594321 = 13628495 auch durch einen Beweis überzeugen, der in der ersten Notation geführt wäre? – Gibt es so einen Beweis dieses Satzes? – Die Antwort ist: nein.

9r[3] & Aber zeigt nicht Russells Erklärung den Zusammenhang
9v[1] & zwischen der Addition & Disjunktion. Zeigt sie nicht, was das
10r[1] Wesen der Addition ist, indem sie sozusagen das allgemeine Schema der Anwendung der Addition zeigt; gleichsam die allgemeine Art, wie sich die Addition auf die Dinge bezieht, die Art ihres Zusammenhangs mit dem worauf sie angewendet wird? So könnte man sich z.B. – vom Ausdruck "addieren" verführt – vorstellen daß man die Einwohner von London & Manchester in irgend einer Weise zusammenlegt, wenn man berechnet wie viele Einwohner beide Städte *zusammen* haben; & nun sagt uns die R'sche Erklärung, daß es sich um keinerlei Zusammenlegen der Gegenstände handelt. (Damit in Zusammenhang, was Frege den 'Pfeffernuß Standpunkt' nannte: die Idee, eine Zahl sei ein Haufe von Dingen.) – Ich habe also die beiden Begriffe zusammengenommen, nicht die Städte oder ihre Einwohner – – aber habe ich nicht doch in einem Sinne die Einwohner zusammengenommen? nämlich, indem ich sie *zählte* & mit den Zeichen, die ich so erhielt, operierte.

10r[2] & 10v[1] & 11r[1] “Die Zahl der Londoner & die Zahl der Dubliner zusammengenommen” ist allerdings gleichbedeutend mit: “die Zahl der Leute, die entweder Londoner oder Dubliner sind” oder mit: “die Zahl der Gegenstände die unter den Begriff *Londoner oder Dubliner* fallen” (von der Idee dieser ‘Gegenstände’ die das Prädikat Mensch haben wird noch gesprochen werden) – aber ist der Ausdruck, der sich des Oder bedient fundamentaler als der andere? Oder auch: muß ich den Begriff der Disjunktion der beiden Begriffe bilden wenn ich von der Summe der beiden Anzahlen reden will? In den meisten Fällen werde ich es nicht tun sondern die beiden Zahlen addieren & von der Summe der beiden Zahlen reden. Es gibt freilich auch den andern Fall: man sagt z.B.: “die Zahl der Leute, die in London, oder der Umgebung von London wohnen ist ...”. Freilich könnte ich auch im ersten Fall– wenn ich gefragt würde: “welcher *Begriff* gehört nun zu der Summe die Du gebildet hast”– sagen: der Begriff: Mensch, welcher ein Londoner oder ein Dubliner ist – aber könnte ich nicht ebensowohl antworten: der Begriff: Faß Bier , das ich zu erzeugen habe (wenn ich nämlich für jeden Londoner & Dubliner ein Faß Bier erzeugen wollte).

RFM III 11r[2] Aber lehrt uns Russell nicht doch *eine* Art des Addierens?

RFM III 11r[3] & 11v[1]

30.10.1939

Angenommen wir bewiesen auf R’s Methode daß $(\exists a \ldots g) \ldots (\exists a \ldots i) \supset (\exists a \ldots s)$ eine Tautologie ist; könnten wir nun unser Resultat dahin ausdrücken, $g + i$ sei s? Das setzt doch voraus, daß ich die drei Stücke des Alphabets als

Repräsentanten des Beweises nehmen kann. Aber zeigt denn das R's Beweis? Den R'schen Beweis hätte ich doch offenbar auch mit solchen Gruppen von Zeichen in den Klammern führen können, deren Reihenfolgen für mich nichts Charakteristisches gehabt hätten, so daß es nicht möglich gewesen wäre die Zeichengruppe in einer Klammer durch ihr letztes Glied zu repräsentieren.

RFM III 11v[2] & 12r[1] Angenommen sogar, der R'sche Beweis werde mit einer Notation der Art x1x2...x10x11...x100... als in der Dezimalnotation geführt, & es seien 100 Glieder in der ersten 300 Glieder in der zweiten & 400 Glieder in der dritten Klammer, zeigt der Beweis selbst dann, daß 100 + 300 = 400 ist? – Wie wenn dieser Beweis einmal zu diesem einmal zu einem andern Resultat führte z.B. 100 + 300 = 420? Was bedarf es, um zu sehen daß das Resultat des Beweises, wenn er richtig geführt ist, immer nur von den letzten Ziffern der ersten zwei Klammern abhängt?

RFM III 12r[2] & 12v[1] Aber für kleine Zahlen lehrt uns doch Russell addieren; denn dann übersehen wir eben die Zeichengruppen in den Klammern & können *sie* als Zahlzeichen nehmen; z.B. 'xy', 'xyz', 'xyzuv'.

Russell lehrt uns also einen anderen Kalkül, um von 2 und 3 zu 5 zu gelangen; & das stimmt auch dann, wenn wir sagen der logische Kalkül sei nur – 'frills', die dem arithmetischen Kalkül angehängt seien.

RFM III 12v[2] & 13r[1] Die *Anwendung* der Rechnung muß für sich selber sorgen. Und das ist, was am 'Formalismus' richtig ist. Die Zurückführung der Arithmetik auf symbolische Logik soll die Applikation der Arithmetik zeigen; gleichsam den Ansatz, mittels welchem sie auf ihrer Anwendung sitzt. So als zeigte man Einem erst eine Trompete ohne das Mundstück – & nun das Mundstück, welches uns zeigt, wie eine Trompete verwendet, geblasen, wird. Das Ansatzstück aber, das uns Russell gibt, ist einerseits zu eng anderseits zu weit; zu allgemein und zu speziell. Die Rechnung sorgt für ihre eigene Anwendung.

RFM III 13r[2] & 13v[1] Wir dehnen unsre Ideen von den Rechnungen mit kleinen Zahlen auf die mit großen Zahlen aus, ähnlich wie wir uns vorstellen, daß wenn die Distanz von hier zur Sonne mit dem Zollstock gemessen werden *könnte* dann eben das herauskäme was wir heute auf ganz andere Art herausbringen. Das heißt, wir sind geneigt die Längenmessung mit dem Zollstab zum Modell zu nehmen auch für die Messung des Abstandes zweier Sterne. Und man sagt, etwa in der Schule: "Wenn wir uns Zollstäbe von hier bis zur Sonne gelegt denken, ..." & scheint damit zu erklären, was wir unter dem Abstand zwischen Sonne und Erde verstehen. Und der Gebrauch eines solchen Bildes ist ganz in Ordnung, so lange es uns klar ist daß wir den Abstand von uns zur Sonne messen können & daß wir ihn nicht mit Zollstäben messen können.

RFM III 13v[2] & 14r[1] 31.10.1939

Wie, wenn jemand sagen würde: "der eigentliche Beweis von 1000 + 1000 = 2000 ist doch erst der Russellsche, der zeigt, daß der Ausdruck ... eine Tautologie ist”? Kann ich denn nicht beweisen, daß eine Tautologie herauskommt, wenn ich in den beiden ersten Klammern je 1000 Glieder & in der dritten 2000 habe? Und wenn ich das beweisen kann, so kann ich das als Beweis des arithmetischen Satzes ansehen.

RFM III 14r[2]

In der Philosophie ist es immer gut, statt einer Beantwortung einer Frage eine *Frage* zu setzen. Denn eine Beantwortung der philosophischen Frage könnte ungerecht sein; ihre Erledigung mittels einer andern Frage ist es nicht.

RFM III 14r[3]

Soll ich also z.B. hier eine *Frage* setzen statt der Antwort, man könne jenen arithm. Satz mit R’s Methode nicht beweisen?

RFM III 14v[1] & 15r[1]

01.11.1939

Der Beweis, daß $(1)(2)\supset(3)$

eine Tautologie ist, besteht darin, daß man immer ein Glied der 3ten Klammer für ein Glied von 1 oder 2 abstreicht. Und es gibt ja viele Methoden dieses Kollationierens. Oder man könnte auch sagen: es gibt viele Arten & Weisen, das Gelingen der 1 → 1 Zuordnung festzustellen. Eine Art wäre z.B. sternförmige Muster eins für die linke eins für die rechte Seite der Implikation zu konstruieren & diese wieder dadurch zu vergleichen daß man ein Ornament aus beiden bildet. Man könnte also die Regel geben: “Wenn Du wissen willst, ob die Zahlen A & B zusammen wirklich C ergeben, schreib einen Ausdruck der Form ... an & ordne die Variablen in den Klammern einander zu indem Du den Beweis dafür anschreibst (oder anzuschreiben trachtest) daß der Ausdruck eine Tautologie ist." Mein Einwand dagegen ist nun *nicht*, daß es willkürlich ist, gerade diese Art des Kollationierens vorzuschreiben, sondern, daß man auf diese Weise nicht feststellen kann, daß 1000 + 1000 = 2000 ist.

15r[2] & 15v[1] 02.11.1939

Die R'sche Methode erzeugt nicht den *Aspekt* dieser Addition. Aber kann dieser Aspekt nicht doch mittels ihrer erzeugt werden durch eine entsprechende Folge von Definitionen? Warum will ich sagen, daß der R'sche Beweis nichts Interessantes der Transformation hinzufügt, die durch die Definitionen allein bewerkstelligt wird? Es kommt mir vor, daß der Beweis davon, daß für die Werte 1000, 1000 & 2000 eine Tautologie herauskommt gänzlich außerhalb des Beweises des arithmetischen Satzes ist.

15v[2] Und doch erscheint mir auch in dem, was ich sage, etwas falsches.

15v[3] & 16r[1] '*Die* Menge in der 3^{ten} Klammer, die den Ausdruck zu einer Tautologie macht, ist die Summe der beiden ersten Mengen.' Wie komme ich aber überhaupt zum Begriff einer bestimmten Menge?

16r[2] Man hat oft gesagt, daß die Bedeutung einer Definition oft darin liege, daß sie die *Wichtigkeit* des Definiens hervorhebe. Aber in anderem Sinne macht sie ja das Definiens im Kalkül verschwinden. Die Wichtigkeit einer Definition liegt zumeist darin, daß Ausdrücke eine andre Struktur erhalten.

16r[3] Führt der, welcher neue Definitionen einführt, nicht einen neuen Kalkül ein?

RFM III 16r[4] & 16v[1] 03.11.1939

Denke, Du hättest eine meilenlange ‘Formel’ angeschrieben, & zeigtest durch Transformation, daß sie tautologisch ist (‘wenn sie sich inzwischen nicht verändert hat’, müßte man sagen). Nun *zählen* wir die Glieder in den Klammern oder teilen sie ab & machen den Ausdruck übersichtlich & es zeigt sich, daß in der ersten Klammer 7566 in der zweiten 2434 in der dritten 10000 Glieder stehen. Habe ich nun bewiesen, daß 2434 + 7566 = 10000 ist? – Das kommt drauf an – könnte man sagen – ob Du sicher bist, daß das Zählen wirklich die Zahlen der Glieder ergeben hat, die während des Beweises in den Klammern standen.

RFM III 16v[2] & 17r[1] Könnte man so sagen: “R. lehrt uns in die 3^te^ Klammer so viele Zeichen schreiben als in den beiden ersten zusammen stehen”? Aber eigentlich: er lehrt uns für je eine Variable in (1) & in (2) eine Variable in (3) schreiben. Aber lernen wir dadurch welche Zahl die Summe zweier gegebener Zahlen ist? Vielleicht sagt man: “Freilich, denn in der 3^ten^ Klammer steht nun das Paradigma, Urbild, der neuen Zahl.” Aber inwiefern ist |||||||||||||||| das Paradigma einer Zahl? Bedenke, wie man es als solches verwenden kann.

17r[2] 05.11.1939

Muß denn ein Begriff eine bestimmte Zahl von Gliedern haben?

17r[3] & 17v[1] Es ist falsch zu sagen: “Unter der Summe der Anzahlen zweier Begriffe verstehe ich die Anzahl der Begriffsdisjunktion” – sondern ich verstehe darunter dasselbe wie die Anzahl der Begriffssumme, wenn sich diese Anzahl in bestimmter Weise aus den beiden ersten Zahlen berechnen läßt. D.h., wenn das was man unter ‘Anzahl der Begriffssumme’ versteht eben *so* aus den Zahlen der ersten Begriffe zu erhalten ist.

17v[2] & 18r[1] 06.11.1939

Wir haben einerseits eine Definition der Zahlensumme, die keine Andeutung darüber macht, wie eine Addition anzuwenden ist. Diese Erklärung scheint deshalb vielleicht unbefriedigend. Anderseits ist da eine Erklärung der Summe aus ihrer Anwendung heraus. (Und diese scheint im Vergleich zur ersten unbefriedigend, weil sie sich in Dinge mischt, um die sie sich nicht zu bekümmern hat.) Wenn ich nun sage: die Summe der Anzahlen zweier Begriffe ist die Anzahl der Begriffssumme – so muß ich dazu sagen: & diese Zahl ist aus den beiden ersten so & so zu berechnen. – Wenn das aber der Fall ist, warum definiere ich nicht die Zahlensumme durch diese ihre Berechnung? – Ich verstehe eben unter der Zahl der Begriffssumme etwas, was durch eine bestimmte Rechnung aus den Zahlen der Summandenbegriffe zu erhalten ist.

18r[2] & 18v[1] Einmal scheine ich zuerst nur mit (den) Begriffen zu operieren & was dann die Zahl des resultierenden Begriffes ist, nenne ich Summe der Zahlen der Teilbegriffe. – Im andern Fall habe ich mit Begriffen, deren Zahlen die Zahlen sind, (gar) nichts zu tun.

18v[2] 07.11.1939

Warum soll ich nicht sagen: “Wenn 5 die Zahl von ϕ ist & 7 die Zahl von ψ, *so nenne ich* 12 ‘die Zahl von $\phi \vee \psi$’”? Statt zu sagen: “dann ist die Zahl von $\phi \vee \psi$ 12”.

18v[3] & 19r[1] Die Fregesche Erklärung der Summe scheint uns den Inhalt der Addition zu erklären, während die bloßen Rechenregeln dies nicht zu tun scheinen. Aber muß hier nicht ein falscher Schein vorliegen? – *Beide* Erklärungen müssen uns ja die Rechnungsregeln geben. Und gibt die erste Erklärung wirklich *mehr*, – muß sie dann nicht Überflüssiges geben?

19r[2] & 19v[1] & 20r[1] & 20v[1] Woher aber der Schein, daß die erste Erklärung inhaltlich ist? denn beide zeigen uns ja eine Rechentechnik mit Zeichen. – In der ersten Erklärung ist schon alles vorbereitet, um z.B. für “ϕ” “Londoner” & für “ψ” “Dubliner” einzusetzen. Und nun scheint die Erklärung zu sagen: Wenn der Begriff ‘Londoner’ n Glieder hat & der Begriff ‘Dubliner’ m Gegenstände, so brauchst Du nur den Begriff ‘Londoner oder Dubliner’ zu bilden, & so viele Glieder dieser Begriff hat soviel beträgt n + m.

Aber wie sehe ich nach, welche Zahl ihm zukommt?! – Indem ich den Begriff ‘Londoner oder Dubliner’ untersuche?

So als sagte man: Die Disjunktion der Begriffe kannst Du doch gewiß leicht bilden – nun, die Anzahl dieses Begriffs ist die Summe n + m. – Als wäre jetzt ja alles (schon) getan, da man ja nur mehr nachschauen braucht, welches die Anzahl der Begriffssumme ist.

20v[2] Man könnte natürlich definieren: Der Ausdruck “die Zahlensumme der Begriffe ‘ϕ’ und ‘ψ’” solle bedeuten: die Anzahl des Begriffes ‘$\phi \vee \psi$’.

20v[3] Kann man denn aber nicht erklären: “Addition ist diejenige Operation, die gebraucht wird, um aus den Anzahlen zweier Begriffe die Anzahl der Begriffssumme zu finden”?

20v[4] & 21r[1] Aber ist das richtig? Braucht man dazu *addieren*? Kann man nicht z.B. sagen, die Anzahl von $\phi \vee \psi$ sei: 1000 + 2000?

21r[2] 08.11.1939

Man könnte, was ich hier betreibe, ‘infantile Mathematik’ nennen.

21r[3] & 21v[1] “Der Begriff ‘$\phi \vee \psi$’ hat doch eine Zahl”. Wie soll sie festgestellt werden? Unabhängig von den Zahlen von ‘ϕ’ und ‘ψ’? Und wie wenn sich durch Zählung der Gegenstände die ϕ genügen, der Gegenstände die ψ genügen & der Gegenstände die $\phi \vee \psi$ genügen ergibt daß die erste Zahl 100 die zweite 200 & die dritte 302 ist? Es soll also heißen: die Summe der Anzahlen von ϕ und ψ ist die Anzahl der Begriffssumme, – wie sich diese aus der Berechnung ergibt.

21v[2] Wer also sagt, die Summe zweier Anzahlen sei die Anzahl der Begriffsdisjunktion, sagt eigentlich: “Berechne die Anzahl der Begriffssumme, dann hast Du die Summe der beiden Anzahlen”.

RFM III 21v[3] & 09.11.1939

22r[1] Die R'sche Tautologie, die dem Satz a + b = c entspricht, zeigt uns vor allem nicht in welcher Notation die Zahl c zu schreiben ist & es ist kein Grund warum sie nicht in der Form a + b geschrieben werden soll. –Denn R. lehrt uns ja nicht die Technik des Addierens, etwa, im Dezimalsystem. – Aber könnten wir sie vielleicht aus seiner Technik ableiten? Fragen wir einmal so: Kann man die Technik des Dezimalsystems aus der des Systems 1, 1 + 1, (1 + 1) + 1, etc. ableiten? Könnte man diese Frage nicht auch so stellen: Wenn man eine Rechentechnik in dem einen System & eine im andern System hat, – wie zeigt man, daß die beiden äquivalent sind?

22r[2] & 22v[1] & 23r[1] & 23v[1] 13.11.1939

Ein Volksstamm habe eine Technik des Zählens, etwa die unsere im Dezimalsystem. Statt des Addierens, Subtrahierens, etc. aber verwenden sie folgenden Vorgang: Sie stellen Eisenwürfel von genau gleicher Größe her, zählen etwa 3470 in eine Wagschale, 250 in die andere & nun zählen sie, wieder mit 1 anfangend Würfel in die zweite Wagschale bis die Waage einspielt. Das Resultat dieses Prozesses drücken sie dann durch eine Formel aus, etwa "250 + 3220 = 3470". Sie haben also durch ein Experiment erhalten, was wir durch eine Rechnung? – Wie verwenden sie die Formel? – Wenn 250 Soldaten in einer Reihe stehen & sie stellen weitere 3220 dazu, so erwarten sie daß eine Zählung aller 3470 ergeben werde. – Warum? – Es hat sich gezeigt daß dies für gewöhnlich so herauskam. – Aber wie, wenn sie einmal die oben beschriebene Wägung ausführen & sie erhalten nun die Formel 250 + 3000 = 3470 – sagen sie dann: "diesmal ergeben *diese* Zahlen 3470" oder sagen sie: "es muß ein Fehler in der Wägung vorliegen"? – Habe ich im zweiten Fall das Wägen nicht mehr als Experiment, sondern als Beweis aufgefaßt? − − Nun, wenn (die) Erfahrung mich oft genug das gleiche gelehrt hat, so werde ich endlich unbedingt an einer Annahme festhalten & alles andere muß sich nach *ihr* richten. Man kann sagen: die Annahme versteinert zur Regel. – Wenn nun die Hypothese, daß n + m Würfel ℓ Würfeln das Gleichgewicht halten zur Regel versteinert, wird die Hypothese dann zum arithmetischen Satz?

23v[2] "250 Würfel + 3220 Würfel *sind soviel, wie* 3470 Würfel."

23v[3] "250 + 3220 Würfel sind die gleiche Anzahl von Würfeln wie 3470."

23v[4] 14.11.1939

'Aber warum vertraust Du dieser Rechnung, daß sie Dir wirklich die gleiche Anzahl liefert?' – Ich vertraue ihr (gar) nicht. *Das* ist, was ich jetzt 'gleiche Anzahl' nenne.

23v[5] & 24r[1] Ich will sagen: Mit 'ebensoviel' verbinde ich eine gewisse Vorstellung – etwa

;

& nun führe ich für ebensoviel ein neues Kriterium ein. "Nun nenne ich *das* 'ebensoviel'." Natürlich wegen einer Verwandtschaft des neuen Kriteriums mit dem alten.

24r[2] [→ Dieser Satz ist] in gewissem Sinne analog dem gebildet: diese *wiegen* soviel wie jene. Er sieht es so an: in den Ziffern allein liegt es noch nicht, daß die einen gleichviele sind wie die andern. Gleichviele zu sein ist ein Drittes.

24r[3] Wie vergleicht sich:

1. “250 und 3220 Erbsen sind soviele, wie 3470 Erbsen”

2. “250 und 3220 Erbsen wiegen gleichviel, wie 3470 Erbsen”

3. “250 und 3220 Erbsen haben das gleiche Volumen, wie 3470 Erbsen” ?

24v[1] 15.11.1939

Man möchte (vielleicht) sagen: a ist ein Satz der Mathematik, b aber ein Erfahrungssatz. – Aber kann nicht a auch als Erfahrungssatz verstanden werden? – Und kann c nicht leicht als mathematischer & als Erfahrungssatz gedeutet werden? Warum dann nicht b als mathematischer Satz?

24v[2] & 25r[1] Warum soll man sich nicht die Arithmetik eines Volkes als mit den Vorgängen des Wägens untrennbar verbunden denken Wie es eine Mathematik des Zeichnens & Messens mit Zirkel & Lineal gibt – warum nicht (so) eine Mathematik des Wägens?

25r[2] Und wenn die Mathematik a priori ist, warum soll es nicht der Satz b sein? wenn wir nur nicht die Erfahrung als Zeugin für oder gegen ihn anrufen. –

25r[3] & 25v[1] Im Archimedischen Beweis des Hebelgesetzes wird der Satz, daß der symmetrisch belastete gleicharmige Hebel sich im Gleichgewicht befindet nicht als Erfahrungssatz sondern als Satz a priori behandelt; sowie im Beweis des Satzes von den kommunizierenden Gefäßen der Satz, das Wasser in einem Gefäß bleibe offenbar im Gleichgewicht, auch wenn ein Teil des selben plötzlich erstarrte.

Vergleiche: auch den Beweis mit der Stevinschen Kette. Wenn man diesen Satz als Satz der Erfahrung auffaßt, so appelliert er an eine Beobachtung, die gewiß niemand ausgeführt hat.

25v[2] & 26r[1] Betrachte diesen Satz: "Müssen sich die n + m & die ℓ Würfel das Gleichgewicht halten — nun, es sind vor allem *gleich viele*."

(Wenn, z.B., die n + m Kugeln in einem Kreis in gleichen Abständen liegen & auch die ℓ Kugeln liegen in gleichen Abständen in einem Kreis, so haben wir beidemale die gleiche Figur.) Und sie halten sich auch das Gleichgewicht, in einer idealen Welt.

26r[2] 16.11.1939

Wir hätten (dann) eine Statik a priori in der nicht gesagt wird wie die Kanten der Würfel zu messen sind, noch, wie festzustellen ist, daß sie aus dem gleichen Material bestehen; so wie in der Euklidischen Geometrie nicht gesagt wird wie wir die Längengleichheit zweier Strecken feststellen. Was ist aber der Beweis eines Satzes dieser rein mathematischen Statik? Natürlich nicht das Experiment des Wägens.

26v[1] Ist es nun mit dem Zählen wie mit dem Wägen?

RFM III 26v[2] “Ein Beweis soll nicht nur zeigen, daß es so ist, sondern daß es so sein muß.”

RFM III 26v[3] Unter welchen Umständen zeigt dies das Zählen?

17.11.1939

RFM III 26v[4] & 27r[1] { Man möchte sagen: wenn die Ziffern & das Gezählte ein einprägsames Bild ergeben. Wenn dieses Bild nun statt jedes neuen Zählens dieser Menge gebraucht wird. – Aber hier scheinen wir nur von *räumlichen* Bilden zu reden: wenn wir aber eine Reihe von Wörtern auswendig wissen & nun zwei solche Reihen einander eins zu eins zuordnen indem wir z.B. sagen

“der erste – Montag; der zweite – Dienstag; der dritte – Mittwoch; etc.” – können wir so nicht *beweisen* daß vom Montag zum Donnerstag vier Tage sind? Es fragt sich eben: Was nennen wir ein “einprägsames Bild”. Was ist das Kriterium davon, daß wir es uns eingeprägt haben? Oder ist die Antwort hierauf: “Daß wir es als Paradigma der Identität benützen!”?

RFM III 27r[2] Wir machen nicht *Versuche*, an einem Satz, oder Beweis, um seine Eigenschaften festzustellen.

RFM III 27r[3] & 27v[1] Wie reproduzieren wir, kopieren wir einen Beweis? – Nicht, z.B., indem wir Messungen an ihm anstellen.

RFM III 27v[2] & 28r[1] Wie wenn ein Beweis so ungeheuer lang wäre, daß man ihn unmöglich übersehen könnte – oder sehen wir einen anderen Fall an: Man habe als Paradigma der Zahl die wir 1000 nennen eine lange Reihe von Strichen in einen harten Fels gegraben. Diese Reihe nennen wir die Ur-Tausend & um zu erfahren, ob tausend Menschen auf einem Platz sind ziehen wir Striche, oder spannen Schnüre (1 → 1 Zuordnung). Hier hat nun das Zahlzeichen für 1000 nicht die Identität einer Gestalt sondern eines physikalischen Gegenstandes. Wir können uns ähnlich eine Ur-Hundert etc. denken & einen Beweis daß 10 × 100 = 1000 ist, den wir nicht *übersehen* könnten.

RFM III 28r[2] Die Ziffer für 1000 im 1 + 1 + 1 + 1... System kann nicht durch ihre *Gestalt* erkannt werden.

28r[3] 18.11.1939

Es wird mir schwer, hier gerecht zu sein. Es ist in der Philosophie schwer, nicht ungerecht zu sein, wenn man den *gerechten* Ausweg nicht sieht.

RFM III 28r[4] & 28v[1]

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Ist diese Figur ein Beweis für 27 + 16 = 43: weil man zu "27" kommt, wenn man die Striche der linken Seite zählt, zu "16" auf der rechten Seite, & zu "43" wenn man die ganze Reihe zählt?

Worin liegt hier das Seltsame – wenn man die Figur den Beweis dieses Satzes nennt? Doch darin, wie dieser Beweis zu reproduzieren ist, oder wiederzuerkennen ist, darin, daß er keine charakteristische visuelle Gestalt hat. –

28v[2] Die meisten Leute verstehen nichts, & wundern sich daher über nichts.

RFM III 28v[3] & 29r[1] Wenn nun jener Beweis auch keine visuelle Gestalt hat, so kann ich ihn dennoch genau kopieren(, reproduzieren) – ist die Figur also nicht doch der Beweis? Ich könnte ihn etwa in ein Stahlstück einritzen & von Hand zu Hand gehen lassen. Ich würde also Einem sagen: "Hier hast Du den Beweis, daß 27 + 16 = 43 ist." – – Nun, kann man nicht *doch* sagen: er beweise den Satz mit Hilfe der Figur? Doch; aber die Figur ist nicht der Beweis.

RFM III 29r[2] & 29v[1] Das aber würde man doch einen Beweis von 250 + 3220 = 3470 nennen: man zählt über 250 hinaus & fängt zugleich auch bei 1 zu zählen an & ordnet die beiden Zählungen einander zu: 251 ... 1 252 ... 2 253 ... 3 etc. 3470 ...3220 Man könnte das einen Beweis nennen, der durch 3220 Stufen fortschreitet. Das ist doch ein Beweis – & kann man ihn übersichtlich nennen??

29v[2] & 30r[1] Die Zeichenbildung nach einem gewissen System. (∃x) ϕx (∃n, m) ϕn.ϕm (∃a, r, v) ϕa.ϕr.ϕv – – – – – – – – – – –

Worin besteht es, das System zu sehen? Etwa darin auf den Befehl die Reihe fortzusetzen so & so zu reagieren. Und durch eine bestimmte Definition kann ich wohl ein System *andeuten*, indem ich gerade diese Zeichen zusammenfasse, aber ich kann nicht das System durch bloße 'Abkürzung' der Schreibweise schaffen; ich hebe es nur hervor. Wie ich ein System durch die Schreibweise

x y z ‿ u v w ‿ r s t ‿

zum Ausdruck bringe, so auch durch Definitionen. Aber die bloße Abkürzung des Zeichens zeigt mir nicht wie nun in *jedem* Fall diese Definition anzuwenden ist.

RFM III 30r[2] & 30v[1] Wie kannst Du sagen, daß Russell den Satz "250 + 3220 = 3470" nicht beweisen kann?! Denk Dir einfach, daß man die Definitionen 1 + 1 = 2, 2 + 1 = 3, etc. nicht *darum* auswendig weiß, weil sie einem System folgen – man weiß sie eben auswendig. Was ist die Erfindung des Dezimalsystems eigentlich? Die Erfindung eines Systems von Kürzungen – – aber was ist das System der Kürzungen ? ist es bloß das System der neuen Zeichen, oder auch ein System ihrer Anwendungen als Abkürzung? Und ist es das letztere, dann ist es ja eine neue Anschauungsart des alten Zeichensystems.

RFM III 30v[2] Können wir vom 1 + 1 + 1... System kommend, durch bloße Abkürzungen der Schreibweise im Dezimalsystem rechnen lernen?

30v[3] & 31r[1] 19.11.1939

"Wiederhole diesen Vorgang, diese Operation, die wir ... nennen wollen!" – Weiß er, was er zu wiederholen hat?

31r[2] 20.11.1939

Eine Definition führt den Ausdruck eines *neuen Systems* ein.

31r[3] Man könnte freilich nach jedem mathematischen Satz sagen “per definitionem”. Und so wäre, wenn man z.B. auf Skolems Art vorgeht, 250 + 3220 = 3470 einfach eine abgeleitete Definition.

31r[4] & 31v[1] Und es ist natürlich auch wahr – “es sind 250 + 3220 Leute in diesem Raum” heißt *genau dasselbe* wie: “es sind 3470 Leute in diesem Raum”. In dem mathematischen Satz liegt kein Naturgesetz. Ist der eine Satz wahr, so ist es *damit* auch schon der zweite, & umgekehrt! Sodaß, wer durch Versuch den einen festgestellt hat eben damit auch schon den zweiten festgestellt hat, *& umgekehrt*. Und doch deutet der eine auf eine andere Art der Verifikation, als der andre. Es ist ganz richtig zu sagen: “In dieser Kiste sind 23 + 27 Äpfel”, wenn man einfach sagen will, es seien in ihr 50 Äpfel – & doch wird es niemand sagen, der nicht einen bestimmten Zweck mit dieser Teilung verbindet.

RFM III 31v[2] & 32r[1] Angenommen ich habe nach Russell einen Satz der Form (∃xyz...) (∃uvw...) ⊃ (∃abc...) bewiesen – & nun ‘mache ich ihn übersichtlich’, indem ich über die Variablen Zeichen x1,x2,x3... schreibe – soll ich nun sagen, ich habe nach Russell einen arithmetischen Satz im Dezimalsystem bewiesen?

RFM III 32r[2] 22.11.1939

Aber jedem Beweis in Dezimalsystem entspricht doch einer im Russellschen System! – Woher wissen wir, daß es so ist? Lassen wir die Intuition beiseite. – Aber man kann es beweisen. –

RFM III 32r[3] Wenn man eine Zahl im Dezimalsystem aus 1, 2, 3 … 9, 0 definiert & die Zeichen 0,1…9 aus 1, 1 + 1, (1 + 1) + 1, …, kann man dann durch die rekursive Erklärung des Dezimalsystems hindurch von irgendeiner Zahl zu einem Zeichen der Form 1 + 1 + 1... gelangen?

RFM III 32v[1] Wie, wenn Einer sagte: Die R.sche Arithmetik stimmt mit der gewöhnlichen bis zu Zahlen unter 10^{10} überein; dann aber weicht sie von ihr ab. Und nun führt er uns einen R-Beweis dafür vor daß $10^{10} + 1 = 10^{10}$ ist. Warum soll ich nun einem solchen Beweis nicht trauen? Wie wird man mich davon überzeugen, daß ich mich im R-Beweis verrechnet haben muß? Brauche ich denn aber einen Beweis aus einem anderen System, um mich zu überzeugen, ob ich mich in dem ersten Beweis verrechnet habe? Genügt es nicht, daß ich diesen Beweis übersehbar anschreibe?

RFM III 32v[2] & 33r[1] 23.11.1939

Liegt denn nicht meine ganze Schwierigkeit darin, einzusehen, wie man, ohne aus R's logischem Kalkül herauszutreten zum Begriff der *Menge von Variablen* im Ausdruck "(∃ x,y,z etc.)" kommen kann, dort wo dieses Zeichen nicht übersehbar ist? – Nun kann man ihn aber doch übersehbar machen indem man schreibt:

(∃x1,x2,x3,etc.). Und dennoch verstehe ich etwas nicht: man hat doch nun das Kriterium für die Identität so eines Ausdrucks geändert! Ich sehe jetzt auf andere Weise, daß die Menge der Zeichen in zwei solchen Ausdrücken die selbe ist.

33r[2] & 33v[1] Wenn ich eine Folge von Zeichen auswendig weiß & die Zeichen in der ersten Klammer reichen vom ersten Zeichen bis zum

"",

in der zweiten Klammer vom ersten bis zum

"",

dann in der dritten vom ersten bis zum

"".

RFM III 33v[2] Ich bin eben versucht zu sagen: R's Beweis kann wohl Stufe für Stufe weitergehen, aber am Schluß wisse man nicht recht was man bewiesen habe – wenigstens nicht nach den alten Kriterien; indem ich den R-schen Beweis übersichtlich mache, beweise ich etwas über diesen Beweis.

RFM III 33v[3] & 34r[1] & 34v[1] Ich will sagen: man brauche die R'sche Rechentechnik gar nicht anzuerkennen, & könne mit einer andern (Rechentechnik) beweisen, daß es einen R'schen Beweis des Satzes geben *müsse*. Dann aber ruht der Satz freilich nicht mehr auf dem R-Beweis. Oder: Daß man sich zu jedem bewiesenen Satz der Form m + n = l einen R'schen Beweis vorstellen kann, zeigt nicht daß der Satz auf diesem Beweis ruht. Denn der Fall ist denkbar, daß man den R-Beweis eines Satzes vom R-Beweis eines andern Satzes gar nicht unterscheiden kann & nur darum sagt sie seien verschieden, weil sie die Übersetzungen zweier erkennbar verschiedener Beweise sind.

RFM III 34v[2] Oder: Etwas hört auf Beweis zu sein, wenn es aufhört Paradigma zu sein, z.B. R.'s logischer Kalkül; & anderseits ist jeder andere Kalkül annehmbar, der uns als Paradigma dient.

34v[3] & 35r[1] & 35v[1] & 36r[1] 24.11.1939

Man könnte doch fragen: Was ist das Eigentümliche eines mathematischen Problems überhaupt? Wenn ich z.B. frage: "gibt es einen Weg diese

Figur nachzufahren ohne zweimal die gleiche Strecke zu passieren?" so würde jeder sagen: das ist ein *mathematisches* Problem, das ist mathematisch zu entscheiden. Ebenso, wenn man die Frage stellt: "Kann man die Rechtecke dieser Figur mit roter & grüner Farbe so anstreichen, daß jedes Rechteck entweder ganz rot oder ganz grün ist & daß ein jedes sich von jedem angrenzenden abhebt?" Was ist charakteristisch mathematisch an diesen Problemen? Nun, man könnte sagen, daß wir für sie eine bestimmte Art der Beantwortung gelten lassen. Z.B.: Wenn es mir gelungen ist in ein jedes der Rechtecke solchermaßen entweder den Buchstaben 'x' oder 'y' zu schreiben, daß zwei angrenzende Rechtecke nie den gleichen Buchstaben enthalten, so nehme ich das als positive Beantwortung der zweiten Frage an. Nun nehmen wir an die Figur von der wir sprachen sei nicht als diese bestimmte Gestalt definiert gewesen sondern als die Figur in einem gewissen Zeitraum die auf dieser Tafel zu sehen ist & nehmen wir an diese Figur flimmerte & wir fragten nun: "läßt sie sich so & so nachziehen?" – würden wir dies eine mathematische Frage nennen? Wie weiß ich, noch eh' ich einen Begriff von der

Art der Lösung habe, schon, daß dies eine mathematische Frage ist?

36r[2] "Das ist eine *mathematische* Frage" – heißt: Das ist ein für allemal durch ein Bild zu entscheiden.

36r[3] & 36v[1] Daß der R'sche Beweis von n + m = l alles mögliche Überflüssige enthält ist wohl klar, aber *das* zu zeigen genügt mir noch nicht. Nun, wenn er auch einigermaßen ausgeschmückt ist, macht ihn das noch nicht falsch. Man braucht dies um & auf nicht, aber es schadet auch nichts. Wenn wir sie aber weglassen, so haben wir vorerst eine Konstruktion, mittels zwei Reihen von Variablen eine dritte Reihe zu bilden, die so viele Variable enthält, als beide ersten zusammen. Analog etwa dieser Konstruktion:

Genügt nun dies, die Addition der Kardinalzahlen zu erklären? Ist es richtig, daß unser ganzer Additionskalkül mit Kardinalzahlen wirklich auf so einem eins-zu-eins Abstreichen *beruht*, sodaß dieses im Hintergrund jeder solchen Rechnung steht?

RFM III 25.11.1939

36v[2]

Es ist eine Tatsache, daß verschiedene Methoden der Zählung so gut wie immer übereinstimmen.

RFM III 36v[3] & 37r[1] Wenn ich die Felder eines Schachbretts zähle, komme ich so gut wie immer zu '64'.

RFM III 37r[2] Wenn ich zwei Reihen von Wörtern auswendig weiß, z.B., Zahlwörter & das Alphabet & ich ordne sie nun einander 1 → 1 zu a 1 b 2 c 3 etc.

so komme ich bei ‘z’ so gut wie immer zu ‘26’.

RFM III 37r[3] & 37v[1] & 38r[1] Es gibt (so) etwas wie: eine Reihe von Wörtern auswendig können. Wann sagt man ich wisse das Gedicht … auswendig? Die Kriterien sind ziemlich kompliziert. Übereinstimmung mit dem gedruckten Texte ist eines. Was müßte geschehen, das mich zweifeln machte, daß ich wirklich das ABC auswendig weiß? Es ist schwer vorzustellen. Aber ich verwende nun das Aufsagen, oder Anschreiben aus dem Gedächtnis, einer Wortfolge als Kriterium der Zahlengleichheit, Mengengleichheit. [I’m much too slick & all I produce is pretty slick. Es hat nicht genug Falten im Gesicht sondern ist oberflächlich & von glatter Stirn. Zugleich macht es fälschlich den Eindruck der Tiefe, denn es ist von Einem geschrieben der sich so gern tief wüßte. Das Gesicht ist zu faltenlos; aber Falten kommen vom *Kummer*, nicht von der Bequemlichkeit. Wer auf dem Kummer schwimmen will, um ja nie unterzutauchen, wie sollte der Tiefe kennen. Mein ganzes Leben (inneres & äußeres) ist darauf angelegt, auf sicherem Boot *auf* dem Meere, auf der Oberfläche, zu schwimmen. Ich will doch gar nicht zahlen; wie sollte ich erhalten?]

RFM III 38r[2] Soll ich nun sagen: Das macht ja alles nichts – die Logik bleibt doch der Grundkalkül nur wird freilich, ob ich zweimal dieselbe Formel vor mir habe, von Fall zu Fall verschieden festgestellt.

38r[3] & 38v[1] 26.11.1939

Stellen wir uns vor, daß wir nie andere Zeichenfolgen als die von der Form x1,x2,x3...x10x11... gesehen hätten. Unsere logischen Beweise bezögen sich dann ganz natürlich eben auf *diese* Folgen. Nehmen wir an, ich bilde nun den Begriff der 'Addition von 10' mittels des Begriffs der 'Addition von 1'. Und dann, mittels der Addition von 10 erst den der 100. –

38v[2] Ist es die Logik, die mich zwingt, – – –

RFM III 38v[3] Es ist nicht die Logik, die mich zwingt – möchte ich sagen – einen Satz von der Form (∃) (∃) ⊃ (∃) anzuerkennen, wenn in den ersten beiden Klammern je eine Million Variable ist & in der dritten zwei Millionen. Ich will sagen: die Logik zwänge mich in diesem Falle gar nicht irgend einen Satz anzuerkennen. Etwas *anderes* zwingt mich so einen Satz als der Logik gemäß anzuerkennen.

RFM III 38v[4] & 39r[1] 27.11.1939

Die Logik zwingt mich nur, sofern mich der logische Kalkül zwingt.

RFM III 39r[2] & 39v[1] Aber es ist doch dem Kalkül mit 1000000 wesentlich, daß sich diese Zahl muß in eine Summe 1 + 1 + 1... auflösen lassen! Und um sicher zu sein, daß wir die richtige Anzahl von Einsern vor uns haben, können wir ja die Einser numerieren. 11+12+13+14+...+11000000 Diese Notation wäre ähnlich der: '100,000.000,000', die ja auch das Zahlzeichen übersehbar macht. Und ich kann mir doch denken, jemand hätte große Summen Geldes in Pfennigen in ein Buch eingetragen wo sie etwa als 100-stellige Zahlen erschienen, mit denen ich nun zu rechnen hätte. Ich finge nun damit an, sie mir in eine übersehbare Notation zu übersetzen, würde sie aber doch 'Zahlzeichen' nennen, sie als Dokumente von Zahlen behandeln. Ja ich würde es sogar als Dokument einer Zahl ansehen, wenn mir einer sagte N hat soviele Schillinge, als Erbsen in dieses Faß gehen. Anders wieder: "Er hat soviele Schillinge als das Hohelied Buchstaben hat".

39v[2] 28.11.1939

Versuche nicht, recht zu behalten! Es ist fruchtbarer, zu trachten, das eigne Unrecht zu beweisen. Ich bin jetzt eigentlich sicher, ich habe mich geirrt. Aber der Platz meines Irrtums & seine Reichweite weiß ich nicht.

RFM III 39v[3] 29.11.1939

Die Notation 'x1,x2,x3...' macht den Ausdruck '(∃...)' zur Gestalt & damit die R-bewiesene Tautologie.

RFM III 39v[4] & 40r[1] Laß mich so fragen: Ist es nicht möglich, daß die 1 → 1 Zuordnung im R.schen Beweis nicht verläßlich vollzogen werden kann, daß, *z.B.*, wenn wir sie zum Addieren benützen wollen, regelmäßig sich ein dem gewöhnlichen Resultat widersprechendes ergibt, & daß wir das auf eine Ermüdung schieben, die , ohne daß wir's wissen uns gewisse Schritte überspringen läßt? Und könnten wir dann nicht sagen: – wenn wir nur nicht ermüdeten, würde sich dieses Resultat ergeben –? Darum, weil es die *Logik* fordert? Fordert sie es denn? Kontrollieren wir (hier) nicht die Logik mit einem anderen Kalkül?

RFM III 40v[1] Nehmen wir an wir nähmen immer 100 Schritte des logischen Kalküls zusammen & erhielten nun verläßliche Resultate, während wir sie nicht erhalten, wenn wir alle Schritte auszuführen versuchen – – man möchte sagen: die Rechnung basiert ja doch auf Einerschritten, da ein Hunderterschritt durch Einerschritte definiert ist. – Die Definition sagt doch: einen Hunderterschritt machen sei dasselbe wie …, – & doch machen wir den Hunderterschritt & *nicht* die hundert Einerschritte. Beim abgekürzten *Rechnen* folge ich doch einer *Regel* – – & wie wurde diese Regel abgeleitet? – Wie, wenn der gekürzte & der ungekürzte Beweis verschiedene Resultate ergeben?

RFM III 41r[1] 30.11.1939

Was ich sage kommt doch darauf hinaus: daß ich, z.B., '10' als '1 + 1 + 1 + 1…' definieren kann & '100 × 2' als '2 + 2 + 2…', aber darum nicht notwendig ‘100 × 10’ als ‘10 + 10 + 10…’ oder gar als ‘1 + 1 + 1 + 1…’.

RFM III 41r[2] Ich kann mich davon, daß 100 × 100 = 10000 ist durch ein ‘abgekürztes’ Verfahren überzeugen. Warum soll ich dann nicht *dieses* als das ursprüngliche Beweisverfahren betrachten?

RFM III 41r[3] Ein abgekürztes Verfahren lehrt mich, was bei dem unabgekürzten herauskommen *soll*. (Statt daß es umgekehrt wäre.)

RFM III 41v[1] 01.12.1939

“Die Rechnung basiert ja doch auf den Einerschritten …” Ja; aber auf andre Weise. Der Beweisvorgang ist eben ein anderer.

RFM III 41v[2] Ich könnte z.B. sagen:

10 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 und *gleichermaßen* 100 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10. Habe ich nicht die Erklärung von 100 auf die sukzessive Addition von 1 basiert? Aber in der selben Weise, als hätte ich 100 Einser addiert? Braucht es in meiner Notation überhaupt ein Zeichen der Form – ‘1 + 1 + 1…’ mit 100 Summanden geben?

RFM III 41v[3] & 42r[1] Die Gefahr scheint hier zu sein, das gekürzte Verfahren als einen blassen Schatten des ungekürzten anzusehen. Die Regel des Zählens ist nicht das Zählen.

RFM III 42r[2] 02.12.1939

Worin besteht es 100 Schritte des Kalküls ‘zusammenzunehmen’? Doch darin, daß man nicht die

Einerschritte sondern einen andern Schritt als maßgebend ansieht.

42r[3] & 42v[1] Wie weiß ich, daß beim Abdrucken einer Seite eines mathematischen Buches immer die gleiche Anzahl von Strichen auf dem Papier erzeugt wird? Hier scheinen z.B. gewisse Fehler möglich, andere ganz undenkbar. (Man kann es sich leicht erklären, daß beim Abdrucken der Zeichen von '$x^2 + 2xy + y^2$' statt des 'y2' nur 'y' erscheint; aber nicht, daß statt dessen '(y+1)3' erscheint. Wenn also beim Abdrucken dieselben Fehler vorkämen wie sie etwa ein dummer Schüler machen würde.)

RFM III 42v[2] & 43r[1] Beim gewöhnlichen Addieren von Zahlen im Dezimalsystem machen wir Einerschritte, Zehnerschritte, etc.. Kann man sagen, das Verfahren basiere auf dem, nur Einerschritte zu machen? Und man könnte es so begründen: Das Resultat der Addition schaut allerdings so aus – '7583', aber die Erklärung dieses Zeichens, seine Bedeutung, die endlich auch in seiner Anwendung zum Ausdruck kommen muß ist doch der Art: 1 + 1 + 1 + 1 + 1 u.s.f.. Aber ist dem so? Muß das Zahlzeichen so erklärt werden oder diese Erklärung implicite in seiner Anwendung zum Ausdruck kommen? Ich glaube, wenn wir nachdenken zeigt sich's, es ist nicht der Fall.

RFM III 43r[2] Das Rechnen mit Kurven oder mit dem Rechenschieber. Freilich wenn wir die eine Art des Rechnens mit der anderen kontrollieren, kommt normalerweise dasselbe heraus. Wenn es nun aber mehrere Arten gibt – wer sagt, wenn sie nicht übereinstimmen, welches die eigentliche, d.h. aus dem *Wesen* der Zahl stammende, Rechnungsweise ist?

43v[1] 03.12.1939

Sich seiner Handlungen schämen ist ein Teil des menschlichen Lebens – & ich will dem entgehen, ich will es vermeiden. Das heißt: ich will das Los der andern Menschen nicht teilen. Das ist, wie wenn ich mich für zu gut hielte mit anderen Hunger oder Mühe zu teilen; als wollte ich in einem Palast leben (& fände dies mir ganz angemessen) während die Anderen in gewöhnlichen Häusern & Hütten leben.

43v[2] ‘Der Beweis muß übersehbar sein’ – heißt das nicht einfach: das *Bild* eines Beweises muß als Beweis funktionieren können?

44r[1] Wie, wenn man sagte: man muß sich den Beweis merken können?

RFM III 04.12.1939

44r[2]

Wo ein Zweifel darüber auftauchen kann, ob *dies* wirklich das Bild *dieses* Beweises ist, wo wir bereit sind die Identität eines Beweises anzuzweifeln, dort hat die Ableitung ihre Beweiskraft verloren. Denn der Beweis dient uns ja als Maß.

RFM III Könnte man sagen: Zu einem Beweise gehört ein von uns
44r[3] anerkanntes Kriterium der richtigen Reproduktion des Beweises?

RFM III D.h., (auf den gewöhnlichen Fall angewandt), es muß uns als
44r[4] & sicher feststehen, daß wir beim Beweisen (z.B.) kein Zeichen
44v[1] übersehen haben. Daß uns kein Teufelchen betrogen haben kann, indem es Zeichen ohne unserm Wissen verschwinden ließ, hinzusetzte, etc.

RFM III Man könnte sagen: Wenn man sagen kann: “auch wenn uns ein
44v[3] Dämon betrogen hätte, so wäre doch alles in Ordnung”, dort hat der Schabernack, den er uns antun wollte, eben seinen Zweck verfehlt.

44v[4] “Der Beweis muß übersehbar sein” – heißt: wir müssen bereit sein ihn als Richtschnur zu nehmen dafür, – – –

04.12.1939 – – – *dafür*, was als gleich & ungleich zu gelten hat, etc..

44v[5] Ein mathematischer Beweis, könnte man sagen, hilft immer, einen Begriff zu definieren.

45r[1] Der Beweis muß unser Vorbild, unser Bild, davon sein, wie dieser Ausdruck richtig anzuwenden ist.

RFM III 05.12.1939

45r[2]

Der Beweis, könnte man sagen, zeigt nicht bloß, *daß* es so ist, sondern: *wie* es so ist. Er zeigt, *wie* 13 + 14 27 ergeben.

RFM III “Der Beweis muß übersehbar sein” – heißt: wir müssen bereit
45r[3] sein, ihn als Richtschnur unseres [(nicht-mathematischen)] Urteilens zu gebrauchen.

RFM III Wenn ich sage “der Beweis ist ein Bild” – so kann man sich ihn
45r[4] auch als kinematographisches Bild denken.

RFM III Den Beweis macht man ein für alle Mal.

45v[1]

45v[2] 06.12.1939

Kann ich sagen: “Der Beweis ist ein Bild davon, wie es aussieht wenn 200 & 200 400 geben”? Man könnte etwa sagen: es gibt auch ein Bild davon wie 200 & 200 399 ergeben – es verschwindet nämlich dabei eine Einheit. Oder: “Wenn 200 & 200 400 ergibt, so geht das *so* zu.”

45v[3] “*Dies* Bild macht uns sagen, daß 200 + 200 = 400 sind.” Es ist unser Vorbild für die Addition von 200 & 200.

45v[4] & Dieses Bild zeigt uns nicht, *daß* 200 & 200 400 ergeben –
46r[1] sondern *wie* sie es ‘ergeben’.

46r[2] Kann man sagen: “So schaut es aus, wenn 200 & 200 400 ergeben”? “Ergeben” muß doch hier *zeitlich* gemeint sein!

46r[3] Schau den geschriebenen Beweis als eine Zeichnung an.

46r[4] Wenn ich aber 200 Äpfel zu 200 Äpfeln lege, so sieht es gewöhnlich *nicht* so aus.

46r[5] Wenn ich aber 200 Äpfel zu 200 Äpfeln lege, so sieht es gewöhnlich *nicht* so aus.

46r[6] Wie, wenn ich sagte: “So kann es ausschauen, wenn man 200 Äpfel & 200 Äpfel zusammengibt.”

46r[7] Oder: “So kann es ausschauen, wenn man 200 & 200 Äpfel so zusammengibt, daß sie 400 ergeben.”

46v[1] 07.12.1939

... wir müssen bereit sein ihn als Richtschnur zu nehmen für die Beurteilung einer Situation; wir müssen, z.B., auf Grund dieses Bildes bereit sein, zu sagen, daß nach diesen & diesen Teilungen & Abhebungen soviel £ zurückbleiben müssen, wenn keine, auf uns unbekannte Weise, dazu oder abhanden gekommen sind.

RFM III Der Beweis muß natürlich vorbildlich sein.
46v[2]

RFM III 08.12.1939
46v[3]

Der Beweis(, (das Beweisbild)) zeigt uns das Resultat eines Vorgangs (der Konstruktion); & wir sind überzeugt, daß ein *so* geregeltes Vorgehen (immer) zu diesem Bild führe.

RFM III (Der Beweis führt uns ein synthetisches Faktum vor.)
47r[1]

47r[2] ‘Ja, – wenn ich nach diesen Vorschriften vorgehe, muß ich immer *so* gehen (wie dies Bild es zeigt), muß immer *das* herauskommen.’

RFM III 09.12.1939
47r[3]

Mit dem Satz, der Beweis sei ein Vorbild, – dürfen wir natürlich nichts neues sagen.

RFM III 47r[4] Der Beweis muß ein Vorgang sein, von dem ich sage: Ja, so muß es sein; das muß herauskommen, wenn ich mich nach dieser Regel richte.

RFM III 47r[5] & 47v[1] Der Beweis, könnte man sagen, muß ursprünglich eine Art Experiment sein – wird aber dann einfach als Bild genommen.

RFM III 47v[2] Wenn ich 200 Äpfel & 200 Äpfel zusammenschütte & zähle, & es es kommt 400 heraus, so ist das kein Beweis für 200 + 200 = 400. D.h., wir würden dieses Faktum nicht als Paradigma zur Beurteilung aller ähnlichen Situationen verwenden wollen.

RFM III 47v[3] Zu sagen: "diese 200 Äpfel & diese 200 Äpfel geben 400"– sagt: Wenn man sie zusammenschüttet, kommt keiner weg, noch dazu, sie verhalten sich *normal*.

47v[4] 'Das ist nicht nur einmal geschehen, sondern (es) muß sich notwendig wiederholen.'

48r[1] Wir nehmen dies Bild zum Vorbild einer 1 → 1 Zuordnung von 200 + 200 Gegenständen und 400 Gegenständen.

48r[2] Diese Transformationen werden von einem einmaligen Vorgang zum Begriff.

RFM III 48r[3] 11.12.1939

'Das ist das Vorbild der Addition von 200 & 200'– nicht: ' Das ist das Vorbild davon, daß 200 & 200 addiert 400 ergeben'. Der Vorgang des Addierens ***ergab*** allerdings 400, aber dies Resultat nehmen wir nun zum Kriterium der richtigen Addition – oder einfach: der Addition – dieser Zahlen.

RFM III 48r[4] Der ‘bewiesene Satz’ drückt aus, was aus dem Beweisbild abzulesen ist.

RFM III 48v[1] Der Beweis ist uns ein Paradigma des richtigen Zusammenzählens von 200 Äpfeln & 200 Äpfeln: D.h., er bestimmt einen neuen Begriff: ‘das Zusammenzählen von 200 & 200 Gegenständen’. Oder man könnte auch sagen: “ein neues Kriterium dafür, daß nichts weggekommen, oder dazugekommen ist”.

RFM III 48v[2] ← Der Beweis muß unser Vorbild, unser Bild, davon sein, wie diese Operationen *ein Ergebnis* haben.

RFM III 48v[3] Der Beweis *definiert* das ‘richtige Zusammenzählen’.

RFM III 48v[4] & 49r[1] Der Beweis ist unser Vorbild eines bestimmten *Ergebens*,– welches als Vergleichsobjekt (Maßstab) für wirkliche Veränderungen dient.

49r[2] 12.12.1939

Das ist ein Bild, welches zustande kommt, wenn wir diesen Regeln folgen – und nun sagen wir: Es *muß* zustande kommen.

49r[3] Der Beweis ist das Vorbild eines neuen Begriffes.

49r[4] Wie aber, wenn ein logischer Beweis von einem *Satz* zum andern *Satz* fortschreitet? Nun, der Beweis des Satzes beweist natürlich immer seine Beweisbarkeit (Konstruierbarkeit) – aber wird er nicht auch anders benützt? Liegt hier nicht das Interesse, das diese Transformationen für uns haben, wo *anders*, als im früher betrachteten Fall.

49v[1] Wenn ich z.B. aus (x)fx f(a) folgere — — — —

49v[2] – – – – : wir müssen bereit sein, ihn als Richtschnur zu nehmen dafür, wie ein Urteil zu verifizieren ist.

49v[3] 13.12.1939

Beweis verglichen einem jigsaw puzzle. – *Müssen* die Stücke, wenn sie sich nicht ändern, immer wieder zu dem gleichen Bild zusammengelegt werden können?

49v[4] 15.12.1939

Gestern nicht gearbeitet. Scheine müde zu sein, abgestumpft!

49v[5] & 50r[1] 17.12.1939

Ich erkenne doch aber auch ein Beweisverfahren als äquivalent einem andern an! Ich sage: “man kann die Teilbarkeit *auch so* beweisen”.

RFM III 50r[2] Der Beweis überzeugt uns von etwas – – aber nicht der Gemütszustand der Überzeugung interessiert uns jetzt, sondern die Handlungen die diese Überzeugung belegen.

RFM III 50r[3] Daher läßt uns die Aussage, der Beweis überzeuge uns von der Wahrheit dieses Satzes, kalt, da dieser Ausdruck der verschiedensten Auslegungen fähig ist.

RFM III 50r[4] & 50v[1] Wenn ich sage: “der Beweis überzeugt mich von etwas”, so muß aber der Satz, der dieser Überzeugung Ausdruck gibt nicht im Beweise konstruiert werden. Wie wir z.B. multiplizieren, aber nicht notwendigerweise das Ergebnis in Form des Satzes ... × ... = ... hinschreiben. Man wird also wohl sagen, die Multiplikation gebe uns diese Überzeugung, ohne daß der *Satz* der sie ausdrückt je ausgesprochen wird.

50v[2] & 51r[1] Der Beweis kann mit einem *Satz* endigen, braucht nicht mit einem *Satz* zu endigen. Ein Satz, ein sogenannter Satz, zeigt uns beiläufig an, wie der Beweis zu verwenden ist, da der Satz ja Zeichen enthalten muß, die Worten der Umgangssprache entsprechen (& so die Brücke zur Anwendung durch eine uns wohlbekannte Praxis schlägt).

RFM III 51r[2] Ein psychologischer Nachteil der Beweise, die *Sätze* konstruieren, ist, daß sie uns leichter vergessen lassen, daß der *Sinn* des Resultats nicht aus diesem allein abzulesen (ist), sondern aus dem *Beweis*. In dieser Hinsicht hat das Eindringen des Russellschen Symbolismus in die Beweise viel Schaden gemacht.

RFM III 51r[3] & 51v[1] Die Russellschen Zeichen hüllen die wichtigen Formen des Beweises, gleichsam, bis zur Unkenntlichkeit ein, wie wenn eine menschliche Gestalt in (viele) Tücher gewickelt ist.

51v[2] (Ich sagte einmal: “Wenn Du wissen willst, was bewiesen ist, schau auf den Beweis”. Also nicht: “schau auf das Ende des Beweises”.)

51v[3] Das menschliche Vorgehen nach der Regel ist ein Vorgang dessen Ergebnis die Erfahrung lehrt.

51v[4] Der Beweis aber sagt: Wenn Du nicht zu *diesem* Ergebnis gelangst, bist Du nicht nach dieser Regel vorgegangen.

51v[5] & 52r[1] "Der Beweis überzeugt uns von der Wahrheit dieses Satzes": Wie *äußert* sich diese Überzeugung– z.B.– welchen Schluß rechtfertigt dieser Satz? Der durch den Beweis erzeugte mathematische Satz ist ein *Instrument* – und wir wollen wissen: Wie wird dieses Instrument angewandt?

52r[2] (Mit dem: "er ist ein Instrument" will ich sagen, seine Funktion sei nicht, Glauben oder Unglauben – Kopfschütteln oder Kopfnicken zu erzeugen.)

52r[3] Was fangen wir mit der Überzeugung an: – 25 × 25 sei gleich 625?

RFM III 18.12.1939

52r[4] & 52v[1] Bedenken wir, wir werden in der Mathematik von *grammatischen* Sätzen überzeugt; der Ausdruck, das Ergebnis, dieser Überzeugtheit ist also, daß wir eine *Regel annehmen*.

RFM III 52v[2] Nichts ist wahrscheinlicher, als daß der Wortausdruck des Resultats eines mathem. Beweises dazu angetan ist, uns einen Mythus vorzumachen. Wie sollte es nicht so sein, da jeder Ausdruck in diesen Sätzen in einer sehr speziellen, & dabei, gewissermaßen, übertragenen Bedeutung gebraucht wird.

52v[3] 19.12.1939

Könnte man sagen: Der bewiesene Satz hat zwar nicht die Form einer Regel, aber er läßt sich in eine Regel übersetzen, also erzeugt der Beweis ein Vorbild für einen Symbolismus.

RFM III 53r[1] Ich will etwa sagen: Wenn auch der bewiesene mathematische Satz hinaus auf eine Realität außerhalb (seiner selbst) zu deuten scheint, (so) ist er doch nur (der) Ausdruck der Anerkennung eines neuen Maßes (der Realität).

RFM III 53r[2] Wir nehmen also (aus diesen Grundlagen, auf diese Weise) die Konstruierbarkeit (Beweisbarkeit) dieses Symbols (nämlich des math. Satzes) zum Zeichen dafür, daß wir Symbole so & so transformieren sollen – – –

RFM III 53r[3] & 53v[1] Wir haben uns im Beweis zu einer Erkenntnis durchgerungen? Und der letzte Satz spricht diese Erkenntnis aus? Ist diese Erkenntnis nun frei vom Beweise (ist die Nabelschnur abgeschnitten)? – Nun, der Satz wird jetzt allein & ohne das Anhängsel des Beweises verwendet.

RFM III 53v[2] Warum soll ich nicht sagen: ich habe mich, im Beweis, zu einer Entscheidung durchgerungen?

RFM III 53v[3] Der Beweis stellt diese Entscheidung in ein System von Entscheidungen.

RFM III 53v[4] (Ich könnte natürlich auch sagen: "der Beweis überzeugt mich von der Zweckmäßigkeit dieser Regel". Aber das zu sagen könnte leicht irreführen.)

RFM III 53v[5] 20.12.1939

Der durch den Beweis bewiesene Satz dient als Regel, also als Paradigma. Denn nach der Regel *richten* wir uns.

RFM III 54r[1] Aber bringt uns der Beweis nur dazu, daß wir uns nach dieser Regel richten (sie anerkennen), oder zeigt er uns auch, *wie* wir uns nach ihr richten sollen?

RFM III 54r[2] Der math. Satz soll uns ja zeigen, was zu sagen *Sinn* hat.

RFM III 54r[3] & 54v[1] Der Beweis konstruiert einen Satz; aber es kommt eben drauf an *wie* er ihn konstruiert. Manchmal z.B. konstruiert er zuerst eine *Zahl* & dann folgt der Satz, daß es eine solche Zahl gibt. Wenn wir sagen, die Konstruktion müsse uns von dem Satz *überzeugen*, so heißt das, daß sie uns dazu bringen muß, diesen Satz so & so anzuwenden. Daß sie uns bestimmen muß, das als Sinn, das nicht als Sinn anzuerkennen.

RFM III 54v[2] 21.12.1939

Was hat der Zweck einer Euklidischen Konstruktion, etwa der Halbierung der Strecke, mit dem Zweck der Ableitung einer Regel aus Regeln mittels logischer Schlüsse gemein?

RFM III 54v[3] Das Gemeinsame scheint zu sein, daß ich durch die Konstruktion eines Zeichens die Anerkennung eines Zeichens erzwinge.

RFM III 54v[4] & 55r[1] Könnte man sagen: "Die Mathematik schafft neue *Ausdrücke*, nicht neue Sätze"?? In**so**fern nämlich, als die mathematischen Sätze ein für allemal in die Sprache aufgenommene Instrumente sind – & ihr Beweis die Stelle zeigt, an der sie stehen.

RFM III 55r[2] Inwiefern sind aber z.B. Russells Tautologien 'Instrumente der Sprache'? Russell hätte sie jedenfalls nicht für solche gehalten. Sein Irrtum, wenn ein solcher vorlag, konnte aber nur darin bestehen, daß er auf ihre *Anwendung* nicht acht hatte.

RFM III 55r[3] & 55v[1] Der Beweis läßt ein Gebilde aus einem anderen entstehen. Er führt uns die Entstehung von einem aus anderen vor. Das ist alles recht gut – aber er leistet doch damit in verschiedenen Fällen ganz Verschiedenes! Was ist das *Interesse* dieser Überleitung?!

RFM III 55v[2] Wenn ich auch den Beweis in einem Archiv der Sprache niedergelegt denke, wer sagt, *wie* dies Instrument zu verwenden ist, wozu es dient!

RFM III 55v[3] & 56r[1] 22.12.1939

Der Beweis bringt mich dazu zu sagen, das *müsse* sich so verhalten. – – Nun, das versteh ich im Fall eines Euklidischen Beweises oder eines Beweises von "$25 \times 25 = 625$", aber ist es auch so im Fall eines R.schen Beweises etwa von "$\vdash p \supset q \bullet p . \supset . q$"? Was heißt hier 'es *müsse* sich so verhalten', im Gegensatz zu 'es verhält sich so'? Soll ich sagen: "nun ich nehme diesen Ausdruck als Paradigma für alle nichtssagenden Sätze dieser Form an"?

RFM III 56r[2] Ich gehe den Beweis durch & sage: "Ja, so *muß* es sein; ich muß den Gebrauch der Sprache *so* festlegen". Ich schlage gleichsam einen Bolzen ein, & schließe damit gewisse Bewegungen aus.

RFM III Ich will sagen, daß das *Muß* einem Gleise entspricht, das ich in
56r[3] der Sprache lege.

56v[1] Wenn wir *diese* Regel annehmen, so müssen wir *diese* Regel annehmen, wenn wir nicht in Schwierigkeiten geraten wollen. Wenn wir z.B. nicht sagen wollen, "wir müssen uns verrechnet haben", wenn gar kein Grund zu dieser Anschauungsweise vorliegt.

56v[2] 23.12.1939

Es ist ein *Bild* was Dich überzeugt, oder *bestimmt*.

RFM III 24.12.1939

56v[3] &

57r[1] Wenn ich sagte, ein Beweis führe einen neuen Begriff ein so meinte ich so etwas wie: der Beweis setze ein neues Paradigma zu den Paradigmen der Sprache; etwa wie wenn man ein besonderes rötlich-blau mischte die besondere Farbmischung irgendwie festlegte, & ihr einen Namen gäbe. Aber wenn wir auch geneigt sind, einen Beweis ein solches neues Paradigma zu nennen – was ist die genaue Ähnlichkeit eines Beweises zu so einem Paradigma? Man möchte sagen: der Beweis ändert die Grammatik unserer Sprache, ändert unsere Begriffe. Er macht neue Zusammenhänge & er schafft den Begriff dieser Zusammenhänge. (Er stellt nicht fest, daß sie da sind, sondern sie bestehen nicht, ehe er sie nicht macht.)

57r[2] Bewege ich mich im Kreise?

57r[3] & 57v[1] Man könnte z.B. sagen ein Beweis schaffe den Begriff des Folgens *dieses* Satzes aus *diesem* Satze. Aber, will ich fragen, wie wird das Begriffswort dieses Begriffes in der gewöhnlichen Sprache d.h. außerhalb der Mathematik angewandt?

RFM III 57v[2] Welchen Begriff schafft '$p\supset p$'? Und doch ist es mir als könnte man sagen "$p\supset p$" diene uns als Begriffszeichen. "$p\supset p$" ist eine Formel. Legt eine Formel einen Begriff fest? Man kann sagen: "daraus folgt nach der Formel ... das & das". Oder auch: "daraus folgt auf die Art (& Weise) ... das & das". Aber ist das ein Satz, wie ich ihn wünsche? Wie ist es aber damit "Zieh' daraus die Konsequenz auf die Art ..."?

57v[3] & 58r[1] 25.12.1939

Aber man kann natürlich auch sagen: "Und daraus folgt, nach der Regel '$p\supset p\vee q$', ..." Und obwohl man sagen kann, daß die Einschaltung "nach der Regel '$p\supset p\vee q$'" in einem gewissen Sinne überflüssig ist, so ist sie doch nützlich (&) spielt ihre Rolle im Sprachspiel.

RFM III 58r[2] Wenn ich vom Beweis sage, er sei ein Vorbild(, ein Bild,) so muß ich es auch von einer R.schen primitive proposition sagen (als der Eizelle eines Beweises).

RFM III 58r[3] & 58v[1] Man kann fragen: Wie ist man darauf gekommen den Satz "$p\supset p$" als eine wahre Behauptung auszusprechen? Nun, man hat ihn nicht im praktischen Sprachverkehr gebraucht, – aber dennoch war man geneigt ihn unter besondern Umständen (wenn man z.B. Logik betrieb) *mit Überzeugung* auszusprechen.

58v[2] 26.12.1939

Wenn ich sagte “Der Beweis muß übersehbar sein” – gilt dies nicht ebenso von jedem Satz: z.B. “In England gibt es 20000 Kühe”? Man denke sich in diesem Satz “20000” ersetzt durch eine Reihe von Strichen.

58v[3] Wir entscheiden uns stufenweise zur Annahme dieser Regel.

58v[4] Wenn der Beweis eine Straße zum (bewiesenen) Satz ist, welche Rolle spielt diese Straße noch, wenn wir sie einmal gegangen sind? Sie gibt dem Satz seinen Ort im System.

59r[1] Was ist es, was mir unklar ist: ist es die Rolle eines Beweises in Sprachspielen?

59r[2] Der mathematische Beweis, weist der Regel ihren *Platz* an. (Die Regel “$16 \times 4 = 64$” könnte ja auch eine ursprüngliche Definition sein.)

59r[3] Der Beweis überredet mich – aber nicht, ⌇ daß das & das sich so & so verhält ⌇, sondern, daß ich meine Begriffe so erweitern, so abändern soll.

59r[4] Ich nehme diese Transformationen an. – Ich lasse *sie* meine Darstellungsweise bestimmen. (Soll ich sagen: “aus den verschiedensten Gründen”?)

RFM III 59r[5] & 59v[1] Wie ist es aber mit ‘$p \supset p$’? Ich sehe in ihm einen degenerierten Satz, der auf der Seite der Wahrheit ist. Ich lege ihn als wichtigen Schnittpunkt von Sätzen fest. Ein Angelpunkt der Darstellung.

59v[2] Wovon soll der Beweis ein Vorbild sein? – Soll ich sagen: von einer bestimmten Sprachbewegung?

59v[3] Wenn der Beweis auch nach Regeln fortschreitet, so ist er doch das Paradigma für *diese* Fortschreitung.

59v[4] & 60r[1] Ich wollte sagen: Der mathematische Beweis wird außerhalb der Mathematik verwendet & ist da das Paradigma eines unserer Begriffe. – Aber in wiefern ist das wahr?

60r[2] Nimm einen R.schen Beweis des ersten Teils der Principia Mathematica: inwiefern kann man ihn Vorbild eines Begriffs nennen? Nun, er ist Vorbild des Begriffs eines bestimmten Übergangs.

60r[3] 27.12.1939

Aber das scheint zu wenig zu sagen. – Wie würde der Begriff so einer Transformation gebraucht? Indem man etwa sagen würde: "N. führt mit den Zeichen die Transformation T aus". Und die Transformation T ist eine, die durch eine Vorlage erklärt wird. Es könnte z.B. eine Umgruppierung der Figuren auf dem Schachbrett sein.

60v[1] Ich bin willens, diese Konstruktion "Konstruktion des regelmäßigen 5-ecks mittels Zirkel & Lineal" zu nennen.

60v[2] Ich will sagen: Durch die Konstruktion des Fünfecks schaffe ich den *Begriff* dieser Konstruktion, & durch den Aufbau des Beweises von … den Begriff dieses Beweises.

60v[4] Aber könnte ich nicht auch sagen: der Beweis schaffe den Begriff dieses Satzes an diesem Platz?

60v[5] Der Beweis ist unser Vorbild dieses Weges.

61r[1] Was aber die Wichtigkeit dieses Weges ist, ist damit noch nicht gesagt. –

61r[2] Es genügt nicht zu sagen: “ich bin willens, diese Konstruktion den Beweis dieses Satzes zu nennen”, sondern ich muß sagen: – “dieses Satzes, den ich so & so gebrauche”.

RFM III 28.12.1939

61r[3] &

61v[1] Die Konstruktion des Beweises beginnt mit irgend welchen Zeichen, & unter diesen müssen einige, die ‘Konstanten’ in der Sprache schon Bedeutung haben. So ist es wesentlich daß “ $\vee$ ” & “~” schon eine uns geläufige Anwendung besitzen & die Konstruktion eines Beweises in den Principia Mathematica nimmt ihre Wichtigkeit, ihren Sinn, daher. Die Zeichen aber des Beweises lassen ihre Bedeutung *nicht* erkennen.

RFM III Die ‘Verwendung’ des Beweises hat natürlich mit jener
61v[2] Verwendung seiner Zeichen zu tun.

61v[3] [Die Biegung des Weges, die Du machst, erscheint Dir als Biegung, während für Deinen Blick die Biegungen vor & hinter Dir sich in Gerade ausstrecken.]

RFM III 61v[4] & 62r[1] Wie gesagt, ich bin ja auch schon von den primitive propositions Russell's in gewissem Sinne überzeugt. Die Überzeugung also, die der Beweis hervorbringt kann nicht nur von der Beweiskonstruktion herrühren.

62r[3] Wenn ich mir denke, daß der Beweis Regeln aus Regeln ableitet, so bestimmt er mich also gewisse Regeln anzuwenden, nachdem ich mich schon vorher entschieden habe gewisse Regeln anzuwenden.

62r[4] Die Beweisfigur zeigt ein gewisses Passen – etwas was ich — aus komplizierten Gründen — als Passen anerkenne.

62r[5] & 62v[1] Wenn ich sage: "der Beweis schafft einen Begriff" – ist dieser Begriff, sozusagen, einfach ein geometrischer Begriff (entsprechend der geometrischen Figur des Beweises), oder ist es ein Begriff, dessen Inhalt mit der (außerlogischen) *Anwendung* des Beweises zu tun hat? (Diese Frage beruht natürlich auf Verwirrung.)

62v[2] Die 'geometrische' Anwendung des Beweises ist offenbar nur *eine* unter vielen möglichen. Und sie ist ja eine Anwendung auf ein praktisches Problem.

62v[3] & 63r[1] 'Das regelmäßige 5-Eck mit Zirkel & Lineal konstruieren' heißt *das* tun. Die Wichtigkeit der Konstruktion, des Begriffes, mag darin liegen, daß diese Konstruktion unter gewissen Umständen ein regelmäßiges 5-Eck im metrischen Sinn ergibt.

63r[2] 29.12.1939

Warum bildet man diesen Begriff? Weil er nützlich ist.

63r[3] Warum bildet man den Begriff des Übergangs von diesen Zeichen zu diesem Zeichen?

63r[4] Aber wovon kann mich ein *Begriff* überzeugen? – Soll ich sagen: davon, daß ich ihn *so* werde gebrauchen können?

63r[5] & 63v[1] Ich habe vor mir eine Reihe von Zeichen – – daß (aber) die Übergänge nach *diesen* Regeln gemacht sind, ist eine Frage der Anerkennung.

63v[2] Wozu kann so eine Folge von Zeichen, wie sie der Beweis ist, nütze sein?

63v[3] Aber könnte man die Konstruktion des metrischen regelmäßigen 5-Ecks kein Experiment nennen? *Das Konstruieren* ist ein Experiment (oder kann eins sein). Die *Konstruktion* ist – wenn Du willst – eine Anweisung.

63v[4] Die Konstruktion des Kräfteparallelogrammes.

63v[5] & 64r[1] Der Beweis, könnte man sagen, ist ein Ausschnitt aus einem System von Zeichen. Wir nehmen – aus verschiedenen Gründen – die Darstellungsform, – die der Ausschnitt repräsentiert, an.

64r[2] Ich habe früher eine Rechnung dargestellt als Teil einer Technik, z.B. des Hausbaues. Es könnte aber auch ein *Experiment* mit Zeichen ein Teil so einer Technik sein: – Man übergieße diese Zeichen mit Schwefelsäure & richte sich dann in der & der Weise nach dem was sich dann auf dem Papier zeigt. – Das aber ist keine Rechnung. Die Rechnung muß ‘übersichtlich’ sein. –

64r[3] Der Begriff der Beweiskonstruktion kann *auf verschiedenen Umwegen* nützlich sein.

64v[1] Was ist der Unterschied zwischen einem Beweis in der reinen Mathematik & einem in der angewandten Mathematik?

RFM III 64v[2] Wenn ich das Urmeter in Paris sähe, aber die Institution des Messens & ihren Zusammenhang mit dem ‘Urmeter’ nicht kennte – könnte ich sagen, ich kenne den Begriff des Urmeters?

RFM III 64v[3] Ist nicht auch so die Beweiskonstruktion ein Teil einer Institution?

RFM III 64v[4] & 65r[1] Der Beweis ist ein Instrument – aber warum sage ich: “ein Instrument der Sprache“? Ist denn die Rechnung notwendigerweise ein Instrument der Sprache?

65r[2] Man könnte sich, z.B., denken, daß die Ableitungen in Principia Mathematica zum Zeitvertreib als ein Schreibspiel, von jemand geschrieben worden wären, der mit “∨” nicht den Begriff ‘oder’ mit ‘~’ nicht den Begriff ‘nicht’ verbunden hätte, u.s.f. Später hätte jemand “∨” als Zeichen der Disjunktion, ~ als Zeichen der Verneinung aufgefaßt, & die (gewissen) zusammenhängenden Zeichengruppen des Buches als Ableitungen von Schlußregeln. Hätte nun dieser Letztere schon *angewandte* Mathematik betrieben?

VB 30.12.1939

65r[3] & 65v[1] Sich psychoanalysieren lassen ist irgendwie ähnlich vom Baum der Erkenntnis essen. Die Erkenntnis, die man dabei erhält, stellt uns (neue) ethische Probleme; trägt aber nichts zu ihrer Lösung bei.

65v[2] Was ist es denn, was Dich quält? Das Fehlen der Übersicht über den Gebrauch des Beweises.

65v[3] Das 'Einleuchten' der Axiome besteht in dem Entschlossensein *sie* als die Richtschnur der Darstellung zu nehmen. Ich suche vergebens eine Übersicht über die Verwendung der Konstruktionen.

65v[4] & 66r[1] Die Konstruktion der 5-Ecks Seite ist bei Euklid ein *Teil* des Beweises, daß die die Konstruktion der 5-Ecks Seite ist. Aber könnten wir uns nicht denken, daß Leute festsetzen, dieser Konstruktionsvorgang soll als Meßmethode für die Regelmäßigkeit der Fünfecke gelten? Gestützt wäre diese Festsetzung durch gewisse (wohlbekannte) Erfahrungen.

RFM III 66r[2] Was ich immer tue, scheint zu sein, zwischen Sinnbestimmung & Sinnverwendung einen Unterschied hervorzuheben.

66r[3] & 66v[1] Die Rolle, die die sogenannten Axiome in der eigentlichen Anwendung spielen ist eine mannigfache: Wie kommt es dann, daß mit ihnen immer eine *Überzeugung* verbunden ist? Was ist das Gemeinsame der Überzeugungen davon daß p⊃p wahr ist & daß man zwischen je 2 Punkten eine Gerade ziehen kann, oder daß alle Körper einander anziehen? – Was ist das Gemeinsame in der Verwendung dieser *Behauptungssätze*?

66v[2] Angenommen, wir sagten: Mit dem Beweis geht immer ein Entschluß zusammen.

66v[3] & 67r[1] Ich möchte sagen: Der Beweis ist eine Konstruktion, & eine Konstruktion, die wir nicht als Experiment betrachten. Sie ist eine Bilderreihe, deren Ende wir 'das Ergebnis' nennen. (Und zwar, weil so wirklich normalerweise das Ergebnis ausschaut, wenn wir nach der & der Regel fortschreiten.) Im Satz: "die Konstruktion ergibt *das*" ist "ergeben" zeitlos gebraucht.

67r[2] Das Ergebnis der Euklidischen Konstruktion der 5-Ecks-Seite ist also nicht die metrische 5-Ecksseite. *Diese* wird sich *manchmal* ergeben, manchmal nicht.

67r[3] Die Konstruktion ist also in diesem Sinne nicht das Errichten eines Baus, das *Erzeugen* eines Ergebnisses, das Ergebnis kein Erzeugnis.

67r[4] (Ich mache Bemerkungen über die Grammatik der Worte 'Konstruktion', 'Ergebnis', etc.)

67r[5] & 67v[1] Das (geometrische) Ergebnis der Euklidischen Konstruktion mit Zirkel & Lineal könnte man daher überhaupt nicht die Fünfecksseite nennen, sondern nur die ganze Konstruktionsfigur – zu der das regelmäßige 5-Eck gar nicht gehört.

67v[2] Wir erkennen aber die Konstruktion in gewissem Sinne an. Was heißt es denn: *sie anerkennen*? Als was kann ich diese Verbindung von Linien anerkennen? Nun es kommt drauf an: – Im 'Beweise' spricht man von einem Anerkennen der Axiome & der einzelnen Schritte. In der Konstruktion der 5-Eckseite gibt es so ein Anerkennen nicht.

67v[3] Aber – wie gesagt – ‘die Axiome, oder Prämissen, etc. anerkennen’ kann doch verschiedenerlei heißen.

67v[4] & 68r[1] Im rein-mathematischen Beweis – könnte man sagen – sei das Anerkennen der Prämissen etwas Ähnliches wie das Anerkennen der Schritte.

68r[2] (Ich fürchte, ich bin vielleicht nicht mehr jung genug, den Purzelbaum zu machen, der vielleicht hier nötig ist.)

68r[3] 31.12.1939

Denn alles liegt daran, das Wohlbekannte von einer neuen Seite anzusehen.

RFM III 68r[4] & 68v[1] Den Beweis anerkennen: Man kann ihn anerkennen als Paradigma der Figur, die entsteht, wenn *diese* Regeln richtig auf gewisse Figuren angewandt wurden. Man kann ihn anerkennen als die richtige Ableitung einer Schlußregel. Oder als eine richtige Ableitung aus einem richtigen Erfahrungssatz; oder als die richtige Ableitung aus einem falschen Erfahrungssatz; oder einfach als die richtige Ableitung aus einem Erfahrungssatz, von dem wir nicht wissen ob er wahr oder falsch ist.

68v[2] Man könnte fragen: ‘Was tun wir, auf den Beweis hin?’

68v[3] & 69r[1] Es ist ein seltsamer Gebrauch in unsrer Sprache, wenn wir von Zahlen in Erfahrungssätzen & auch in Mathematischen reden.

RFM III Kann ich nun aber sagen, daß die Auffassung des Beweises als
69r[2] & ‘Beweises der Konstruierbarkeit’ des bewiesenen Satzes in
69v[1] irgend einem Sinn(e) eine einfachere, primärere, als jede andre Auffassung ist? Kann ich also sagen: “Ein jeder Beweis beweist *vor allem*, daß diese Zeichenform herauskommen muß wenn ich diese Regeln auf diese Zeichenformen anwende”?

Oder: “Der Beweis beweist vor allem, daß diese Zeichenform entstehen kann, wenn man nach diesen Transformationsregeln mit diesen Zeichen operiert. – Das würde auf eine geometrische Anwendung deuten. Denn der Satz dessen Wahrheit, wie ich sage, hier bewiesen ist, ist ein geometrischer Satz, ein Satz Grammatik die Transformierungen von Zeichen betreffend. Man könnte z.B. sagen: es sei bewiesen, daß es *Sinn* habe zu sagen, jemand habe das Zeichen ... nach diesen Regeln aus ... & ... erhalten, aber keinen Sinn etc. etc..

69v[2] & Und doch könnte ich sagen, daß im Beweis *vor allem* anerkannt
70r[1] werden müsse, daß diese Stufen wirklich den Regeln der Übergänge *gemäß* seien. – Ist es aber wirklich wesentlich, daß im Beweis die Regeln angegeben werden, nach denen die Übergänge geschehen?

70r[2] Der Beweis müsse also vor allem als Konstruktion den Regeln gemäß anerkannt werden. –

RFM III Oder: Wenn man die Mathematik jedes Inhalts entkleide, so
70r[3] bleibe, daß gewisse Zeichen aus andern nach gewissen Regeln sich konstruieren lassen. –

RFM III 70r[4] Das Mindeste, was wir anerkennen (müssen) sei: daß dies Zeichen etc. etc. – & diese Anerkennung liege jeder anderen zu Grunde. –

RFM III 70v[1] Ich möchte nun sagen: Die Zeichenfolge des Beweises zieht nicht notwendigerweise irgendein Anerkennen nach sich. Wenn wir aber einmal mit dem Anerkennen anfangen, dann braucht es nicht das 'geometrische' zu sein.

RFM III 70v[2] Ein Beweis könnte doch aus bloß zwei Stufen bestehen: etwa einem Satz '(x).f(x)' & einem 'f(a)' – spielt hier das richtige Übergehen nach einer Regel eine wichtige Rolle?

70v[3] Man könnte fragen: "Warum verwendet die Mathematik überhaupt *satzförmige* Axiome?"

70v[4] & 71r[1] Die Frage ist: Ist es wahr, daß, wie ich behauptet habe, die Mathematik wesentlich die Rolle der Grammatik ihrer Zeichen spielt? – Kann man denn das in dem Beispiel sagen (das ich gab), worin Leute eine Rechnung als Teil einer Technik des Hausbaus verwenden??

71r[2] Ich sagte: bei dieser Rechnung gäbe es ein (sozusagen arithmetisches) Richtig oder Falsch, nämlich: der Regel gemäß oder der Regel zuwider.

71r[3] Haben wir hier nicht, sozusagen, angewandte Mathematik, *ohne reine* Mathematik?

71r[4] Ich wollte doch sagen: Wo die reine Mathematik von Satz zu Satz fortschreitet, da wird von einer Ausdrucksform zur andern fortgeschritten.

71v[2] Ist denn das Charakteristische am Beweis nicht, daß das Bewiesene am Ende ohne den Beweis feststeht? (Obwohl der Beweis immer zur Grammatik des Bewiesenen gehört.)

71v[3] Muß also der Beweis nicht *vor allem* beweisen, daß das Beweisen immer zu diesem Resultat führt?

71v[4] Wenn ich aber sage: muß er das nicht beweisen, so meine ich doch nicht daß dieser Satz beim Beweisen heraus kommt.

71v[5] & 72r[1] Wenn ich also frage: Muß man am Beweis nicht vor allem anerkennen, daß dies Gebilde bei der Anwendung dieser Regeln heraus kommt – – nun, ich brauche ja den Beweis gar nicht so zu formulieren, daß Regeln ausdrücklich ausgesprochen werden.

72r[2] Aber dazu daß der Beweis im Archiv der Sprache niedergelegt werden kann – gehört dazu nicht etwas wie diese geometrische Anerkennung?

RFM III 01.01.1940

72r[3] *Was* ist unerschütterlich gewiß am Bewiesenen?

RFM III 72r[4] & 72v[1] Einen Satz als unerschütterlich gewiß anzunehmen – will ich sagen – heißt, ihn als grammatische Regel zu verwenden: dadurch entzieht man ihn der Ungewißheit.

RFM III 72v[2] "Der Beweis muß übersehbar sein" heißt eigentlich nichts andres als: der Beweis ist kein Experiment. Was sich in ihm ergibt nehmen wir nicht deshalb an weil es sich einmal ergibt, oder weil es sich oft ergibt. Sondern wir sehen im Beweis den Grund dafür, zu sagen, daß es sich ergeben *muß*.

RFM III 72v[3] & 73r[1] Nicht, daß das Zuordnen zu diesem Resultat führt *beweist*– sondern daß wir überredet werden, diese Erscheinungen (Bilder) als Vorbilder zu nehmen dafür, wie es ausschaut, wenn ....

RFM III 73r[2] Der Beweis ist unser neues Vorbild dafür wie es ausschaut, wenn nichts weg- & nichts dazukommt, wenn wir richtig zählen, etc..

RFM III 73r[3] & 73v[1] Ich will sagen: mit der Logik der Principia Mathematica könnte man eine Arithmetik begründen in der 1000 + 1 = 1000 ist; & alles was dazu nötig ist, wäre die sinnliche Richtigkeit der Rechnungen anzuzweifeln. Wenn wir sie aber nicht anzweifeln, so hat daran nicht unsre Überzeugtheit von der Wahrheit der Logik die Schuld.

RFM III 73v[2] Wenn wir beim Beweis sagen: "Das *muß* herauskommen" – so nicht aus Gründen, die wir nicht *sehen*.

RFM III 73v[3] Nicht, daß wir dieses Resultat erhalten, sondern, daß es das Ende dieses Weges ist, läßt es uns annehmen.

RFM III 73v[4] & 74r[1] *Das* ist der Beweis, was uns überzeugt: Das Bild, was uns nicht überzeugt, ist der Beweis auch dann nicht, wenn von ihm gezeigt werden kann, daß es einen Satz exemplifiziert.

RFM III 02.01.1940

74r[2] Das heißt: es darf keine physikalische Untersuchung des Beweisbildes nötig sein um uns zu zeigen, was bewiesen ist.

74r[3] Ich hätte auch etwas sagen können wie: Der muß anschaulich sein.

74r[4] Der Beweis ist unser Vorbild (unser Bild) davon, [wie der neue Begriff zu gebrauchen ist].

74r[5] Der neue Begriff: Diese Regel als Resultat dieser Umwandlungen.

74v[1] Ich bin irgendwie versucht zu sagen: eine neue Regel sei ein neuer *Begriff*, ein in unsre Sprache neu eingeführter Begriff.

74v[2] Aber führt sie nicht nur *dann* einen neuen Begriff ein, wenn sie ein neues Bild als Mittel der Darstellung einführt?

74v[3] & 75r[1] Ist es nicht merkwürdig, zu sagen: die Formel "25 × 25 = 625" sei das Zeichen für einen Begriff? Und doch versucht mich etwas, das zu sagen. Ist das nur Unsinn, oder Übereilung? Ist es eine Krankheit meiner Anschauungsweise? Es muß teilweise eine Krankheit sein.

75r[2] Ein System muß gefunden werden – finden wir nicht das, was *offenbar* vorliegt, so werden wir gedrängt, zu dogmatisieren. (Wenn die *richtige* Zusammensetzung nicht gelingt, versuchen wir die Stücke des Puzzles mit Gewalt zusammen zu passen.)

RFM III 75r[3] & 75v[1] Wir sagen von zwei Menschen auf einem Bild nicht *vor allem*: der eine erscheine kleiner als der andre, & *erst dann*, er erscheine weiter weg zu sein. Es ist, kann man sagen, wohl möglich daß uns das kürzer sein gar nicht auffällt sondern *bloß* das Hintenliegen. (Dies scheint mir mit der Frage der 'geometrischen' Auffassung des Beweises zusammen zu hängen.)

RFM III 75v[2] 03.01.1940

'Er ist das Vorbild für das, was man so & so nennt.'

RFM III 75v[3] Von was soll aber der Übergang von "$(x) \bullet \phi x$" auf "ϕa" ein Vorbild sein? Höchstens davon, wie von Zeichen der Art "$(x) \bullet \phi x$" geschlossen werden kann. Das Vorbild dachte ich mir als eine Rechtfertigung, hier aber ist es keine Rechtfertigung. Das Bild $(x) \bullet \phi x$:. ϕa *rechtfertigt* den Schluß nicht. Wenn wir von einer Rechtfertigung des Schlusses reden wollen, so liegt sie außerhalb dieses Zeichenschemas.

RFM III 76r[1] Und doch ist etwas daran, daß der math. Beweis einen neuen Begriff schafft. – Jeder Beweis ist gleichsam ein Bekenntnis zu einer bestimmten Zeichenverwendung.

RFM III 76r[2] Aber wozu ist er ein Bekenntnis? Nur zu *dieser* Verwendung der Übergangsregeln von Zeichen zu Zeichen? Oder (ist er) auch ein Bekenntnis zur Verwendung der primitive propositions in der & der Weise?

RFM III 76r[3] Könnte ich sagen: ich bekenne mich zu $p \supset p$ als einer Tautologie?

RFM III 76v[1] Ich nehme $p \supset p$ als Maxime an, etwa des Schließens.

RFM III 76v[2] Die Idee, der Beweis schaffe einen neuen Begriff könnte man (auch) ungefähr so ausdrücken: Der Beweis ist nicht: seine Grundlagen plus den Schlußregeln; sondern ein *neues* Haus – obgleich ein Beispiel dieses & dieses Stils. Der Beweis ist ein *neues* Paradigma.

76v[3] Der rein math. Beweis ist das Bekenntnis zu einer neuen Maxime. Ist das richtig?

RFM III 76v[4] & 77r[1] Der Begriff, den der Beweis schafft, kann z.B. ein neuer Schlußbegriff sein, ein neuer Begriff des richtigen Schließens. *Warum* ich aber das als *richtiges* Schließen anerkenne, hat seinen Grund außerhalb des Beweises.

RFM III 77r[2] Der Beweis schafft einen neuen Begriff – indem er ein neues Zeichen schafft, oder ist. Oder – indem er dem Satz, der sein Ergebnis ist, einen neuen Platz gibt. (Denn der Beweis ist nicht eine Bewegung, sondern ein Weg.)

77r[3] Aber ist ein neuer Begriff eines richtigen Schlusses ein Begriff in dem Sinne, wie ich mir ihn dachte? Der neue Begriff erlaubt, einen Satz als die Konsequenz aus *diesem* darzustellen.

77r[4] & 77v[1] "Ein neuer Begriff" heißt doch wohl nur ein neuer Behelf der Darstellung.

77v[2] 04.01.1940

Der Beweis ist das, was uns überzeugt – also nicht das, wovon wir meinen, es würde uns überzeugen, wenn wir es überblicken könnten.

77v[3] Oder: Es gibt nichts, was: theoretisch, der Beweis *sein müßte*.

77v[4] Denn nichts hat – sozusagen – die *Pflicht*, der Beweis zu sein.

77v[5] "Das wäre ein Beweis, wenn ich es überblicken könnte"– was macht Dich dessen so sicher? – Ein Beweis?

77v[6] & 78r[1] Könnte man sich nicht denken, daß reine Mathematik nie betrieben würde, sondern nur angewandte?

78r[2] Gibt es *Sätze* – der angewandten Mathematik? Nun, das wären Sätze der Naturwissenschaft in 'mathematischer Sprache' geschrieben. Der Satz "2 + 2 = 4" ist einer der reinen Math. & *so* ist es auch der Satz "2 Äpfel + 2 Äpfel = 4 Äpfel"; dagegen der Satz "Die Preise zweier Anzahlen von Äpfeln verhalten sich wie diese Anzahlen", also "[p 1 p 2] = [n 1 n 2]", ein Satz der angewandten Math., d.i., ein Erfahrungssatz.

78r[3] & 78v[1] Man könnte also sagen: Wenn Mathematik in irgend einem Sinne Logik ist (wenn auch nicht ganz so wie Frege & Russell sich es dachten), so ist ein Satz der angewandten Math. nicht ein mathematischer Satz. Dagegen ist aber ein *Beweis* der angewandten Mathematik ein mathematischer Beweis: eine *Rechnung*.

78v[2] Der Beweis ist ja eben das *Vorbild* der gerechtfertigten Umwandlungen.

78v[3] Der Beweis muß unser Vorbild, unser Bild, davon sein, *welches* die gerechtfertigte Umwandlung sein soll.

78v[4] & 79r[1] 05.01.1940

"Der Beweis muß übersehbar sein" – soll doch (etwa) heißen: die Identität einer Transformation eines Beweises ist nicht durch ein Experiment festzustellen, sondern (unmittelbar) durch die Anschauung.

79r[2] Denn, angenommen, ich habe zwei Zeilen eines Beweises; die zweite ist aus der ersten durch Einsetzung von ... für ... entstanden – wie stelle ich fest, daß sie wirklich so entstanden ist, d.h., daß ich sie mit Recht das Resultat dieser Substitution nenne? Man könnte sich denken, daß so etwas durch eine Wägung festgestellt würde.

79r[3] Der Beweis ist (also) ein anschaulicher Vorgang.

79r[4] & 79v[1] So kann ich mich im Beweis nicht darauf verlassen, daß das Papier die Striche behält, sondern nur darauf, daß mein Gedächtnis sie behält? Unterstütze ich denn nicht zum mindesten mein Gedächtnis durch Anschauen des Geschriebenen & verlasse mich drauf daß das sich nicht geändert hat? – Ich bin auf falscher Fährte. –

RFM III 79v[2] Es darf nicht *vorstellbar* sein, daß *diese* Substitution in *diesem* Ausdruck etwas anderes ergibt. Oder: ich muß es für nicht vorstellbar erklären. (Das Ergebnis eines Experiments aber kann man sich *so* & *so* vorstellen.)

RFM III 79v[3] & 80r[1] Man könnte sich doch aber den Fall vorstellen, daß der Beweis sich dem Ansehen nach ändert – er ist in einen Fels gegraben & man sagt es sei der gleiche, was immer der Anschein sagt.

RFM III 80r[2] Sagst Du eigentlich etwas anderes als: der Beweis wird als *Beweis* genommen?

RFM III 80r[3] Der Beweis muß ein anschaulicher Vorgang sein. Oder auch: der Beweis ist der *anschauliche* Vorgang.

RFM III 80r[4] Nicht etwas hinter dem Beweise, sondern der Beweis beweist.

80r[5] Mir scheint es: ich will *zu viel* beweisen, & darum stocke ich.

80v[1] Der Beweis muß anschaulich sein: überzeugt uns nicht mehr, was wir *sehen*, so hat der Beweis seine Kraft verloren. Ob er nun nach dem 'logischen' Schema Russell's oder anderswie gebaut ist.

80v[2] Von R's Beweis kann sozusagen, gezeigt werden, daß er ein Beweis ist. – Daß aber *das* ein R'scher *Beweis* ist, wäre nun nicht auf die ursprüngliche Weise festzustellen. Es wäre ähnlich wie wenn jemand ein Portrait des N. malte, aber in solcher Art, daß es nicht durch das bloße Ansehen festzustellen wäre, daß es ein Bild des N. ist.

81r[1] Du wirst von etwas anderem überzeugt, daß das der Beweis ist.

81r[2] Ich bin entschlossen anzuerkennen, daß es so einen Beweis *gibt*. Ich bin entschlossen anzuerkennen, daß es *möglich* ist, diesen Satz so zu beweisen.

81r[3] Nun, kann ich nicht beweisen, daß so ein Beweis möglich ist? Das heißt doch: beweisen, daß so eine Konstruktion möglich ist, daß es Sinn hat von so einer Konstruktion zu reden. Aber hat es deswegen auch Sinn von dieser Konstruktion als einem *Beweis* zu reden?

81r[4] & 81v[1] 06.01.1940

Wenn bewiesen wurde, daß eine solche Konstruktion möglich (logisch möglich) ist, so haben wir also auf Grund eines Beweises angenommen, daß, auch im Falle, wenn der Anschein dagegen spräche, eine *so* beschriebene Konstruktion als unmöglich & nur eine *solche* als möglicherweise bestehend anzusehen ist. Aber der *Beweis* überzeugt ja durch den Anschein.

81v[2] Der Beweis läßt etwas offenbar genug erscheinen, daß wir ihn als Paradigma gelten lassen.

82r[1] Was muß er denn (als) offenbar erscheinen lassen?

82r[2] Was läßt z.B. der Beweis:

1 : 3 = 0 ·
3˙
1

als offenbar erkennen? Daß $0\dot{}333 + 13000$ der 3^{te} Teil von 1 ist – oder, daß sich bei der voll ausgeführten Division nach drei Stellen dieser Quotient & dieser Rest ergeben muß? In andern Worten: Ist das Ergebnis des Beweises ein arithmetisches oder ein geometrisches? Es ist offenbar beides. Aber ist eines das primäre?

82r[3] & 82v[1] Aber kann ich nicht sagen: Es muß doch vor allem offenbar sein, daß diese Substitution (i.e., die Substitution nach dieser Regel) wirklich *diesen* Ausdruck ergibt? Muß es nicht vor allem klar sein, daß kein Rechenfehler im Beweis vorliegt??

RFM III 82v[3] 07.01.1940

Wenn ich sage: “es muß vor allem offenbar sein, daß *diese* Substitution wirklich *diesen* Ausdruck ergibt” – so könnte ich auch sagen: “ich muß es als unzweifelhaft annehmen” – aber dann müssen dafür gute Gründe vorliegen: Z.B., daß die gleiche Substitution so gut wie immer das gleiche Resultat ergibt etc. Und besteht darin nicht eben die Übersehbarkeit?

RFM III 83r[1] Ich möchte sagen, daß, wo die Übersehbarkeit nicht vorhanden ist, wo also für einen Zweifel Raum ist, ob (hier) wirklich das Resultat dieser Substitution vorliegt, der *Beweis* zerstört ist. Und nicht – in einer dummen & unwichtigen Weise, die mit dem *Wesen* des Beweises nichts zu tun hat.

RFM III 83r[2] Oder: Die Logik als Grundlage aller Mathematik tut’s schon darum nicht, weil die Beweiskraft der logischen Beweise mit ihrer geometrischen Beweiskraft steht & fällt.

RFM III 83r[3] & 83v[1] D.h.: der logische Beweis, etwa von der Russellschen Art, ist beweiskräftig nur solange, als er auch geometrische Überzeugungskraft besitzt. Und eine ‘Abkürzung’ eines solchen logischen Beweises kann diese Überzeugungskraft haben & durch sie ein Beweis sein, wenn die (voll) ausgeführte Konstruktion nach R-scher Art es nicht ist.

RFM III 83v[2]84r[1] Wir neigen dazu, zu glauben, daß der *logische* Beweis eine eigene, absolute Beweiskraft habe, welche von der unbedingten Sicherheit der logischen Grund- & Schlußgesetze herrührt. Während doch die so bewiesenen Sätze nicht sicherer sein können, als es die Richtigkeit der *Anwendung* jener Schlußgesetze ist.

RFM III 84r[2] 08.01.1940

Die logische Gewißheit der Beweise – will ich sagen – reicht nicht weiter, als ihre geometrische Gewißheit.

RFM III 84r[4] Wenn nun der Beweis ein Vorbild ist, so muß es darauf ankommen, was als eine richtige Reproduktion des Beweises zu gelten hat.

RFM III 84r[5] & 84v[1] Käme z.B. im Beweis das Zeichen “|||||||||” vor, so ist es nicht klar, ob als Reproduktion davon nur ‘die gleiche Anzahl’ von Strichen (oder etwa Kreuzchen) gelten soll, oder ebensowohl auch eine andere, wenn nicht gar zu kleine Anzahl. Etc.

RFM III 84v[2] Es ist doch die Frage, was als Kriterium der Reproduktion des Beweises zu gelten hat, – der Gleichheit von Beweisen. Wie sind sie zu vergleichen, um die Gleichheit festzustellen? Sind sie gleich, wenn sie gleich ausschauen?

RFM III 84v[3] Ich möchte, sozusagen, zeigen, daß wir den logischen Beweisen in der Mathematik davonlaufen können.

RFM III 85r[1] & 85v[1] “Durch entsprechende Definitionen können wir “25 × 25 = 625” in der R.schen Logik beweisen.” – Und kann ich die gewöhnliche Beweistechnik durch die R.sche erklären? Aber wie kann man eine Beweistechnik durch eine andere *erklären*? Wie kann eine *das Wesen* einer andern erklären? Denn ist die eine eine ‘Abkürzung’ der anderen, so muß sie doch eine *systematische* Abkürzung sein. Es bedarf doch eines Beweises, daß ich die langen Beweise systematisch abkürzen kann & also wieder ein System von Beweisen erhalte. Die langen Beweise gehen nun (zuerst) immer mit den kurzen einher & geben ihnen gleichsam ihre Sanktion. Aber endlich können sie den kurzen nicht mehr folgen & diese zeigen ihre Selbständigkeit.

RFM III 85v[2] Das Betrachten der *langen* unübersehbaren logischen Beweise ist nur ein Mittel um zu zeigen, wie diese Technik zusammenbricht & neue Techniken notwendig werden.

85v[3] & 86r[1] [Was ich sagen will, mag Unsinn sein; aber möge ich dann eben das in solcher Weise herausfinden, daß es wertvoll ist.]

RFM III 86r[2] Ich will sagen: Die Mathematik ist ein *buntes Gemisch* von Beweistechniken. – – Und darauf beruht ihre mannigfache Anwendbarkeit & ihre Wichtigkeit.

RFM III 86r[3] Und das kommt doch auf das Gleiche hinaus, wie zu sagen: Wer ein System, wie das R.sche, besäße & aus diesem ‘durch entsprechende Definitionen’ Systeme, wie den Differentialkalkül, erzeugte, der erfände ein neues Stück Mathematik. (Wie ich schon früher gesagt habe.)

RFM III 86r[4] & 86v[1] Nun, man könnte doch einfach sagen: Wenn ein Mensch das Rechnen im Dezimalsystem erfunden hätte – der hätte doch eine mathematische Erfindung gemacht! – Auch wenn ihm Russell’s Principia Mathematica bereits vorgelegen wären. –

RFM III 86v[2] & 87r[1] Wie ist es, wenn man ein Beweissystem einem anderen koordiniert? Es gibt dann eine Übersetzungsregel mittels derer man die in S1 bewiesenen Sätze in die in S2 bewiesenen übersetzen kann. Man kann sich doch aber denken, daß einige – oder alle – Beweissysteme der heutigen Mathematik auf solche Weise einem System, etwa dem R.schen zugeordnet wären. So daß alle Beweise, wenn auch umständlich, in diesem System ausgeführt werden könnten. So gäbe es dann nur das eine System – & nicht mehr die vielen Systeme? – Aber es muß sich doch also von dem *einen* zeigen lassen, daß es sich in den vielen darstellen läßt. – *Ein* Teil des Systems wird die Eigentümlichkeiten der Trigonometrie besitzen, ein anderer die der Algebra, u.s.w.. Man *kann* also sagen, daß in diesen Teilen verschiedene Techniken verwendet werden.

RFM III Ich sagte: der, welcher das Rechnen in der Dezimalnotation
87r[2] erfunden hat, habe doch eine mathematische Entdeckung gemacht. Aber hätte er diese Entdeckung nicht in lauter Russellschen Symbolen machen können. Er hätte, sozusagen (wie ich mich seinerzeit ausdrückte) einen neuen *Aspekt* entdeckt.

RFM III ‘Aber die Wahrheit der wahren math. Sätze kann dann doch
87v[1] aus jenen allgemeinen Grundlagen bewiesen werden.’ – Mir scheint, hier ist ein Haken. Wann sagen wir, ein math. Satz sei wahr? –

RFM III Mir scheint, als führten wir, ohne es zu wissen, neue Begriffe in
87v[2] die R.sche Logik ein. − − Z.B., indem wir festsetzen, was für Zeichen der Form (∃x,y,z...) als einander äquivalent & welche nicht als äquivalent gelten sollen. Ist es selbstverständlich, daß “(∃x,y,z)” nicht das gleiche Zeichen ist wie “(∃x,y,z,u)”?

RFM III Aber wie ist es – : Wenn ich zuerst ‘p⌄q’ & ‘~p’ einführe &
87v[3] & einige Tautologien mit ihnen konstruiere – & dann zeige ich
88r[1] (etwa) die Reihe ~p, ~ ~p, ~ ~ ~p, etc. vor & führe eine Notation ein wie ~1p, 2p.....10p.... . Ich möchte sagen: wir hatten vielleicht an die *Möglichkeit* so einer Reihenordnung ursprünglich gar nicht gedacht & wir haben nun einen neuen Begriff in unsre Rechnung eingeführt. Hier ist ein ‘neuer Aspekt’.

VB 10.01.1940

88r[2] &
88v[1] In aller großen Kunst ist ein *wildes* Tier: *gezähmt*. Bei Mendelssohn, z.B., nicht. Alle große Kunst hat als ihren

Grundbaß die primitiven Triebe des Menschen. Sie sind nicht die *Melodie* (wie, vielleicht, bei Wagner), aber das was der Melodie die *Tiefe* & Gewalt gibt. In *diesem* Sinne kann man Mendelssohn einen "*reproduktiven*" Künstler nennen. –

Im gleichen Sinn: mein Haus für Gretl ist das Resultat entschiedener Feinhörigkeit, *guter* Manieren, der Ausdruck eines großen *Verständnisses* (für eine Kultur, etc.). Aber das *ursprüngliche* Leben, das *wilde* Leben, welches sich austoben möchte – fehlt. Man könnte also auch sagen, es fehlt ihm die *Gesundheit* (Kierkegaard). (Treibhauspflanze.)

RFM III 88v[2] Es ist ja klar, daß ich den Zahlbegriff, wenn auch in sehr primitiver & unzureichender Weise hätte so einführen können – aber dieses Beispiel zeigt mir alles was ich brauche.

RFM III 89r[1] In wiefern kann es richtig sein, zu sagen, man hätte mit der Reihe ~p, ~~p, ~~~p, etc. einen neuen Begriff in die Logik eingeführt? – Nun, vor allem könnte man sagen, man habe es mit dem '*etc.*' getan. Denn dieses 'etc.' steht für ein mir neues Gesetz der Zeichenbildung. Dafür charakteristisch, die Tatsache, daß eine *rekursive* Definition zur Erklärung der Dezimalnotation benötigt wird.

RFM III 89r[2] Eine neue *Technik* wird eingeführt.

RFM III 89r[3] & 89v[1] Man kann es auch so sagen: Wer den Begriff der R.'schen Beweis- & Satzbildung hat, hat damit *nicht* den Begriff jeder *Reihe*

RFM III Ich möchte sagen: R.'s Begründung der Mathematik schiebt die
89v[2] Einführung neuer Techniken hinaus, – bis man endlich glaubt, sie sei (gar) nicht mehr nötig.

RFM III (Es wäre vielleicht so, als philosophierte ich über den Begriff
89v[3] der Längenmessung so lange, bis man vergäße, daß zur Längenmessung die tatsächliche Festsetzung einer Längeneinheit nötig ist.)

89v[4] & (Übrigens meine ich nicht, daß, wenn man zu den
90r[1] R'ussellschen Prinzipien ein Prinzip der Induktion hinzu nimmt, man nun aus dem Wasser ist & die Gesamtheit der Mathematik ableiten kann. Denn ein Prinzip der Induktion ist nur ein *allgemeines Bild* – & seine neue Anwendung eine neue Erfindung. (Nicht 'Intuition'.))

90r[2] Die Vagheit des Begriffs 'Aspekt'. Ich kann freilich sagen, daß, wenn ich in R.s Symbolismus (eines Tages) z.B. Multiplizieren lernte die R'schen Konstruktionen dadurch ein ganz neues Ansehen gewönnen. – Ähnlich dem ist der neue Aspekt, den das Schachspiel gewönne wenn jemand eines Tages nach dem Schreibspiel das Brettspiel erfände.

90v[1] Man sagt gewöhnlich, daß die Anwendung eines Axiomsystems darin liegt, daß man von der *Wahrheit* der Axiome überzeugt ist. Aber was heißt es z.B. von der Wahrheit von 'p⊃p' überzeugt zu sein? – Man stellt sich also die Axiome vor, als wären sie eine Art von Prinzipien der Mechanik: Erkennt man sie an so erkennt man z.B. an, daß ein Körper im Zustand der Ruhe, oder – etc. etc.

RFM III 90v[2] & 91r[1] 11.01.1940

Kann man nun, was ich sagen will *so* ausdrücken: "Wenn wir von Anfang an gelernt hätten alle Mathematik in R's System zu schreiben, so wäre natürlich mit dem R'schen Kalkül die Differentialrechnung, z.B., noch nicht erfunden. Wer also diese Rechnungsart *im R'schen Kalkül* entdeckte – – –."

RFM III 91r[2] Angenommen, ich hätte R'sche Beweise der Sätze

' p ≡ ~ ~ p ' ' ~ p ≡ ~ ~ ~ p ' ' p ≡ ~ ~ ~ ~ p '

vor mir & fände nun einen abgekürzten Weg, den Satz 'p≡~10p'

zu beweisen. Es ist als habe ich eine neue Rechnungsart innerhalb des alten Kalküls gefunden. Worin besteht es, daß sie gefunden wurde?

RFM III 91r[3] & 91v[1] Sage mir: Habe ich eine neue Rechnungsart eingeführt, wenn ich multiplizieren gelernt hätte & mir nun Multiplikationen mit lauter gleichen Faktoren als ein besonderer Zweig dieser Rechnungen auffallen & ich daher die Notation einführe 'a^n = ...' ?

91v[2] Kann man sagen, daß ich, zwar nicht durch eine, einfache, aber durch eine iterative Definition einen neuen Begriff einführe? – Warum aber? Führt eine iterative Def. nicht nur eine *Reihe* von Abkürzungen ein – statt *einer* Abkürzung? (Ist es übrigens eine Abkürzung wenn ich festsetze: 1 + (1 + 1) = (1 + 1) + 1 Def. ?)

RFM III 12.01.1940

91v[3] & 92r[1] Offenbar die bloße ‘abgekürzte’, oder *andere*, Schreibweise – ‘16^2’ statt ‘16×16’ – macht’s nicht. Wichtig ist, daß wir jetzt die Faktoren bloß *zählen*. Ist 16^{15} das gleiche wie

$16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16 \times 16$.? Der Beweis, daß $16^{15} = \ldots.$ ist, besteht nicht einfach darin, daß ich 16 15-mal mit sich selbst multipliziere & daß dabei dies heraus kommt – sondern es muß im Beweis gezeigt sein, daß ich die Zahl *15-mal* zum Faktor setze.

RFM III 92r[2] & 92v[1] & 93r[1] Wenn ich frage: “Was ist das neue an der ‘neuen Rechnungsart’ des Potenzierens” – so ist das schwer zu sagen. Das Wort ‘neuer Aspekt’ ist vag. Es heißt, wir sehen die Sache jetzt anders an – aber die Frage ist: was ist die wesentliche, die *wichtige*, Äußerung dieses ‘andersAnsehens’? Zuerst will ich sagen: “Es hätte einem nie *auffallen* brauchen, daß in gewissen Produkten alle Faktoren gleich sind” – oder: “‘Produkt lauter gleicher Faktoren’ ist ein neuer Begriff” – oder: “Das Neue besteht darin, daß wir die Rechnungen anders zusammenfassen”. Beim Potenzieren ist es offenbar das Wesentliche, daß wir auf die *Zahl* der Faktoren sehen. Es ist doch nicht gesagt, daß wir auf die Zahl der Faktoren je geachtet haben. Es mag uns zum ersten mal auffallen daß es Produkte mit 2, 3, 4 etc. Faktoren gibt, obwohl wir schon lange solche Produkte ausgerechnet haben. Ein neuer Aspekt – aber wieder: Was ist seine *wichtige* Seite? Wozu benütze ich diesen neuen Aspekt? – Nun vor allem lege ich ihn vielleicht in einer Notation nieder. Ich schreibe also, z.B. statt ‘a × a’ ‘a2’. Dadurch beziehe ich mich auf die Zahlenreihe (spiele auf sie an), was früher nicht geschehen war. Ich stelle also doch eine neue Verbindung her! – Eine Verbindung – zwischen welchen Dingen? Zwischen der Technik des Zählens von Faktoren & der Technik des Multiplizierens.

93r[2] & 93v[1] [Ich schreibe oft meine Bemerkungen, wie Hausfrauen alten Kram: Schnüre, Bänder, Lappen, Stecknadeln, sammeln, weil man sie manchmal brauchen kann. Aber wenn man sie je wirklich braucht, sind sie nicht zur Hand.]

RFM III 93v[2] Aber so macht ja jeder Beweis, jede einzelne Rechnung neue Verbindungen!

RFM III 93v[3] & 94r[1] Aber der *gleiche* Beweis, der zeigt, daß a × a × a × a... = b ist beweist doch auch, daß an=b ist; nur, daß wir den Übergang nach der Definition von ‘a^n’ machen müssen. Aber dieser Übergang ist gerade das Neue. Aber wenn er nur ein Übergang zu dem alten Beweis ist, wie kann er dann wichtig sein?

RFM III 94r[2] ‘Es ist nur ein andere Schreibweise.’ Wo hört es auf – bloß eine andre Schreibweise zu sein?

RFM III 94r[3] Nicht dort: wo nur die eine Schreibweise, & nicht die andre, so & so verwendet werden kann?

RFM III 94r[4] & 94v[1] Man könnte es “einen neuen Aspekt finden” nennen wenn Einer statt f(a) schreibt a(f); man könnte sagen: ‘Er *sieht* die Funktion als Argument ihres Arguments an’. Oder wenn Einer statt ‘a × a’ schriebe ‘x(a)’ könnte man sagen: ‘Was man früher als Spezialfall einer Funktion mit zwei Argumentstellen ansah, sieht er als Funktion mit *einer* Argumentstelle an.’ Wer das tut, hat gewiß in einem Sinn den Aspekt verändert, er hat z.B. *diesen* Ausdruck mit anderen zusammengestellt, verglichen, mit denen er früher nicht verglichen wurde. – Aber ist das nun eine *wichtige* Aspektänderung? *Nicht*, solange sie nicht gewisse Konsequenzen hat.

RFM III 94v[2] & 95r[1] Es ist schon wahr, daß ich durch das Hineinbringen des Begriffs der *Zahl* der Negationen von p den Aspekt der logischen Rechnung geändert habe: ‘So hab ich es noch nicht angeschaut’– könnte man sagen. Aber wichtig wird diese Änderung erst dadurch, daß sie die Anwendung des Zeichens ändert.

RFM III 95r[2] 13.01.1940

Einen Fuß als *12 Zoll* auffassen, hieße allerdings den Aspekt des Fußes ändern, aber wichtig würde diese Änderung erst, wenn man nun auch Längen in Zoll *mäße*.

95r[3] Jeder Mensch trachtet sich selbst zu betrügen: und wer jemand betrügen will, macht’s natürlich geschickt & nicht ungeschickt; er wird dem Andern nicht sagen, was der schon durchschauen kann, sondern was er nicht durchschauen kann.

RFM III 95r[4] & 95v[1] Wer das Zählen der Negationszeichen einführt, führt eine neue Art der Reproduktion der Zeichen ein.

RFM III 95v[2] Es ist zwar für die Arithmetik, die (doch) von der Gleichheit von Anzahlen spricht, ganz gleichgültig, wie Anzahlengleichheit zweier Klassen festgestellt wird – aber es ist für ihre Schlüsse nicht gleichgültig, wie ihre Zeichen mit einander verglichen werden, nach welcher Methode also, z.B., festgestellt wird, ob die Anzahl der Ziffern zweier Zahlzeichen die gleiche ist.

VB 95v[3] & 96r[1]

Ein Lehrer, der während des Unterrichts gute, oder sogar erstaunliche Resultate aufweisen kann, ist darum kein guter Lehrer, denn es ist möglich, daß er seine Schüler, während sie unter seinem unmittelbaren Einfluß stehen, zu einer ihnen unnatürlichen Höhe emporzieht, ohne sie doch zu dieser Höhe zu entwickeln, so daß sie sofort zusammensinken, wenn der Lehrer die Schulstube verläßt. Dies gilt vielleicht von mir; ich habe daran gedacht. (Mahlers Lehraufführungen waren ausgezeichnet, wenn er sie leitete; das Orchester schien sofort zusammenzusinken, wenn er es nicht selbst leitete.)

RFM III 96r[2]

Nicht die Einführung der Zahlzeichen als Abkürzungen ist wichtig, sondern der *Methode* des Zählens.

RFM III 96r[3] & 96v[1]

Ich will die Buntheit der Mathematik erklären.

RFM III 96v[2] & 97r[1]

‘Ich kann auch in Russell’s System den Beweis führen, daß 127 : 18 = 7·055 ist.’ Warum nicht. – Aber muß beim R.schen Beweis dasselbe herauskommen, wie bei der gewöhnlichen Division? Die beiden sind freilich durch eine *Rechnung* (durch Übersetzungsregeln etwa) mit einander verbunden; aber ist es nicht doch gewagt die Division in der ‘sekundären’ Technik zu rechnen?

RFM III 97r[2]

Aber wenn nun Einer sagte: “Unsinn – solche Bedenken spielen gar keine Rolle!” –

RFM III 97r[3] & 97v[1]

14.01.1940

– Aber nicht um die Unsicherheit handelt sich’s, denn wir sind (ja) unsrer Schlüsse sicher, sondern darum, ob wir noch (Russellsche) Logik betreiben, wenn wir z.B. *dividieren*. Wie weiß ich, wie ich einen R.schen Beweis als Division anwenden kann? Ich sehe z.B. nach, wie oft eine Länge in einer andern enthalten ist: wie zeigt mir ein R-scher Beweis diese Anwendung? – Z.B., in R.schen Beweisen braucht kein Zählen vorkommen. Aber kann ich nicht doch einen Satz wie '127 : 18 = 7·05' in R.sche Notation übertragen? – Ja, wenn ich eine gewisse Übertragung *annehme*. Aber ist es denn nicht einfach eine Übertragung nach einer Definition? − −

97v[2] & 98r[1] Oder soll ich sagen: Die reine Mathematik hat nichts mit Zahlen zu tun, sowenig wie mit Längen, Kreisen, Winkeln, etc.? Oder vielleicht besser: 'sowenig mit dem *Zählen*, als mit dem Messen von Längen oder von Winkeln, etc. etc..' Aber sie bereitet doch diese Anwendung jedenfalls vor. — Kann man jeden Satz der Mathem. logisch begründen? D.h. muß man wirklich auf diese Sätze & diese Techniken kommen, wenn man die R.schen Beweise abkürzt?

98r[2] 15.01.1940

In Zusammenhang mit Dedekinds Theorem: ich kann nach der dritten die vierte Dezimalstelle rechnen, & nicht etwa nach der dritten die fünfte, während die vierte auf unbestimmte Dauer unbestimmt bleibt. Oder: wenn sich nach der n^{ten} die n & m^{te} ergibt, so muß sich nach einer angebbaren Zahl von Rechnungsstufen die n+1te ergeben. Oder: wenn ich auch mit jeder Rechnungsstufe eine Dezimalstelle berechne es aber unentschieden bleibt, wieviele Stufen ich rechnen muß um die n-te Stelle zu erhalten, so berechne ich keine reelle Zahl.

RFM III 98v[1] Die Trigonometrie hat ihre Wichtigkeit ursprünglich in ihrer Verbindung mit Längen- & Winkelmessungen: sie ist ein Stück Mathematik, das zur Anwendung auf Längen- & Winkelmessungen eingerichtet ist. Man könnte die Anwendbarkeit auf dieses Gebiet auch einen 'Aspekt' der Trigonometrie nennen.

RFM III 98v[2] Wenn ich einen Kreis in 7 gleiche Teile teile & den Kosinus eines dieser Teile durch Messung bestimme – ist das eine Rechnung oder ein Experiment? Wenn eine Rechnung – ist sie denn *übersehbar*?

RFM III 99r[1] Ist das Rechnen mit dem Rechenschieber *übersehbar*?

99r[2] Was heißt es: *glauben*, daß ein Körper so & so viel wiegt ?

RFM III 99r[3] Wenn man den Cosinus eines Winkels durch Messung bestimmen muß, ist dann ein Satz der Form cos α = n ein *mathematischer* Satz? Was ist das Kriterium dieser Entscheidung? Sagt der Satz etwas Äußeres über unsre Lineale, u. dergl., aus; oder etwas Internes über unsre Begriffe? – Wie ist das zu entscheiden?

RFM III 99r[4] & 99v[1] Gehören die Figuren (Illustrationen) in der Trigonometrie zur reinen Mathematik, oder sind sie nur Beispiele einer möglichen *Anwendung*?

99v[2] Übersetzung des Schreibspiels in das Brettspiel: — — —

99v[3] Ich bin nicht gescheit, sondern sehr *dumm*; weil ich nicht sehe, was unter meiner Nase liegt.

RFM III 16.01.1940

99v[4] Wenn an dem, was ich sagen will, irgend etwas Wahres ist, so muß, *z.B.*, das Rechnen in der Dezimalnotation sein eigenes Leben haben. – Man kann natürlich jede Dezimalzahl darstellen in der Form:

& daher die vier Rechnungsarten in dieser Notation ausführen. Aber das Leben der Dezimalnotation müßte unabhängig sein von dem der Strichnotation.

RFM III 100r[1] In diesem Zusammenhang fällt mir immer wieder dies ein: Daß man in R.'s Logik zwar einen Satz a : b = c *beweisen* kann, daß sie uns aber einen richtigen Satz dieser Form nicht konstruieren lehrt, d.h. daß sie uns nicht *Dividieren* lehrt. Der Vorgang des Dividierens entspräche z.B. dem eines *systematischen Probierens* R'scher Beweise zu dem Zwecke etwa den Beweis eines Satzes von der Form 37 × 15 = x zu erhalten. 'Aber die Technik eines solchen systematischen Probierens gründet sich doch wieder auf Logik. Man kann doch wieder logisch beweisen, daß diese Technik zum Ziel führen muß.' Es ist also ähnlich, wie wenn wir im Euklid beweisen, daß sich das & das so & so konstruieren läßt.

100v[1] Unsere Vorstellung von den Mengen sind die Zahlen in der Darstellung unseres Zahlensystems.

100v[2] Im Experiment machen wir oft für das Resultat das Wirken unsichtbarer Vorgänge verantwortlich; der Beweis liegt ganz vor unsern Augen.

RFM III 17.01.1940

100v[3] & 101r[1] Was will Einer zeigen, der zeigen will, daß Mathematik nicht Logik ist? Er will doch etwas sagen wie: – Wenn man Tische, Stühle, Schränke etc. in genug Papier wickelt, werden sie endlich gewiß alle kugelförmig ausschauen.

RFM III 101r[2] Er will nicht zeigen, daß es unmöglich ist, zu jedem math. Beweis einen R'schen zu konstruieren, der ihm (irgendwie) 'entspricht'; sondern, daß das Annehmen so einer Entsprechung sich nicht auf Logik stützt.

RFM III 101r[3] & 101v[1] 18.01.1940

"Aber wir können doch immer auf die primitive logische Methode zurückgehen!" Nun, angenommen, daß wir es können – wie kommt es, daß wir es nicht tun *müssen*? Oder sind wir vorschnell, unvorsichtig, wenn wir es nicht tun? Aber wie gehen wir denn zurück zum primitiven Ausdruck? Gehen wir, z.B., den Weg durch den sekundären Beweis & von seinem Ende aus zurück in's primäre System & sehen zu, wo wir so hingelangen; oder gehen wir in beiden Systemen vor & machen dann die Verbindung der Endpunkte? Und wie wissen wir, daß wir im primären System in beiden Fällen zum gleichen Resultat gelangen? Führt das Vorgehen im sekundären System nicht Überzeugungskraft mit sich?

RFM III 101v[2] & 102r[1] "Aber wir können uns doch bei jedem Schritt im sekundären System denken, daß er auch im primären gemacht werden könnte!" – Das ist es eben: *wir können uns denken, daß er gemacht werden könnte* – ohne, daß wir ihn machen.

RFM III 102r[2] Und warum nehmen wir den einen an Stelle des andern an? Aus *logischen* Gründen?

RFM III 102r[3] "Aber kann man nicht logisch beweisen, daß beide Umwandlungen zum gleichen Resultat gelangen müssen?" – Aber es handelt sich doch hier um Umwandlungen von Zeichen – wie soll denn die Logik hier ein Urteil sprechen?

102v[1] Man sagt häufig: "Es ist leicht zu sehen, daß dieser Prozeß zu *diesem* Resultat führen muß." – Wie kommt es, daß es (leicht) zu sehen ist? Oder bilden wir uns nur ein, es zu sehen – aus einer Art Gedankenlosigkeit?

102v[2] Betrachte statt des Beispiels '1 : 3' ein Beispiel der rekursiven Abkürzung eines R.schen Beweises!

102v[3] 19.01.1940

Frege's Bemerkung, daß, wenn man näher zusieht, doch alle diese Stufen durchlaufen werden mußten, um zu diesem Schluß zu gelangen. (Ja in *seinem* System des Schließens freilich.)

103r[1] 20.01.1940

In gewissem Sinn ist ja die Ähnlichkeit aller Zweige der Mathematik offenbar. Immer wieder die selben Zeichen: Das Gleichheitszeichen, " + ", " − " etc., Funktion & Argument. Das ist doch *etwas*. Aber anderseits – ist es nicht auch irreführend? wie der Gebrauch von Subjekt & Prädikat als Rahmen für tausenderlei Bilder. –

103r[2] ‘Du siehst also: so geht es weiter –.’ Dies Argument wird immer wieder gebraucht. Aber es wird in den verschiedensten Zusammenhängen gebraucht.

103r[3] & 103v[1] Z.B.: Teilbarkeit – wir beweisen daß eine Zahl durch 3 teilbar ist, wenn ihre Ziffernsumme es ist. Der Beweis muß mit den einzelnen Fällen, in denen wir eine Zahl im Dezimalsystem durch 3 dividieren stimmen. Kann man, daß dies der Fall ist, *im Strichsystem* durch Induktion beweisen?

103v[2] Ich *scheine* doch etwas durch meinen Beweis prophezeien zu können – – aber meine Prophezeiung ist eine andere, wenn sie sich auf’s Strichsystem – & eine andere, wenn sie sich auf’s Dezimalsystem bezieht. Und doch ist es für den Beweis (der Teilbarkeit, z.B.) wesentlich, eine solche Vorhersage sein zu können.

103v[3] & 104r[1] Es ist nun die Frage, wie ich in *einem* System beweisen kann, daß die Rechnung in einem andern eine gültige Vorhersage ist?

104r[2] Unser Beweis muß, um eine richtige Vorhersage begründen zu können, in Übereinstimmung sein mit der Geometrie dieses Zeichenraumes.

104r[3] 21.01.1940

Der Beweis der Teilbarkeit, z.B., muß uns überzeugen, daß die Rechnung, *so* ausgeführt, zu diesem Resultat führen muß: d.h., daß wir, die Regeln gewissenhaft befolgend, zu diesem Resultat gelangen *werden*.

104r[4] & 104v[1] Kann man die Frage so stellen: "Wenn man (z.B.) die Zeichen des Dezimalsystems als Abkürzungen der Zeichen des Strichsystems betrachtet – – kann man den Induktionsbeweis im Dezimalsystem als Abkürzung eines Beweises im Strichsystem betrachten?"

RFM III 104v[2] Wie kann der Beweis im Strichsystem beweisen, daß der Beweis im Dezimalsystem ein Beweis ist?

RFM III 104v[3] Nun, – ist es hier mit dem Beweis im Dezimalsystem nicht so, wie mit einer *Konstruktion* bei Euklid, von der *bewiesen* wird, daß sie wirklich eine Konstruktion dieses & dieses Gebildes ist?

RFM III 104v[4] & 105r[1] Darf ich es so sagen: "Die Übertragung des Strichsystems ins Dezimalsystem setzt eine rekursive Definition voraus. Diese Definition führt aber nicht die Abkürzung *eines* Ausdrucks durch einen andern ein. Der Induktive Beweis im Dezimalsystem aber enthält natürlich nicht die Menge jener Zeichen die durch die rekursive Definition in Strichzeichen zu übertragen wären. Dieser allgemeine Beweis kann daher durch die rekursive Definition nicht in einen Beweis des Strichsystems übertragen werden."?

RFM III 105r[2] & 105v[1] Der rekursive Beweis führt eine neue Zeichentechnik ein. – Er muß also den Übergang in eine neue 'Geometrie' machen. (Können wir sagen): wir erhalten eine neue Methode ein Zeichen wiederzuerkennen?

105v[2] "Der Beweis muß übersehbar sein" – heißt das nicht: daß es ein Beweis ist, muß zu sehen sein.

RFM III 22.01.1940

105v[3] & 106r[1] & 106v[1] Der Beweis zeigt uns, was herauskommen *soll*. – Und da jede Reproduktion des Beweises das nämliche demonstrieren muß, so muß sie einerseits das Resultat automatisch reproduzieren, anderseits aber auch den *Zwang* es zu erhalten.

D.h.: wir reproduzieren nicht nur die *Bedingungen*, unter welchen sich dies Resultat einmal ergab (wie beim Experiment), sondern das Resultat selbst. Und doch ist der Beweis kein abgekartetes Spiel, insofern er uns immer wieder muß führen können.

RFM III 106v[2] Wir müssen einerseits den Beweis automatisch ganz reproduzieren können, & anderseits muß diese Reproduktion wieder der *Beweis* des Resultats sein.

RFM III 106v[3] & 107r[1] "Der Beweis muß übersehbar sein" will unsre Aufmerksamkeit eigentlich auf den Unterschied der Begriffe richten: 'einen Beweis wiederholen', 'ein Experiment wiederholen'. Einen Beweis wiederholen heißt nicht: die Bedingungen reproduzieren unter denen einmal ein bestimmtes Resultat erhalten wurde, sondern es heißt, jede Stufe *& das Resultat* wiederholen. Und obwohl so der Beweis also etwas ist, was sich ganz – automatisch muß reproduzieren lassen, so muß doch jede solche Reproduktion den Beweiszwang enthalten das Resultat anzuerkennen.

107r[2] Es ist also, als ob ich sagte: Der Beweis ist nichts als ein Bild, & doch muß er uns überzeugen.

107r[3] & 107v[1] Sind die (diversen) Kalküle der Mathematik nur *darum* nicht durch Russellsche Logik ersetzbar, weil diese zu *weitschweifig* wäre?

107v[2] Oder man könnte fragen: “Die Mathematik kennt die mannigfaltigsten Konstruktionen für ihre Sätze: kann man alle diese Konstruktionen auf R.sche Weise rechtfertigen?”

107v[3] Könnte man fragen: ‘Muß die $\sqrt{2}$, auf Grund der Logik, im Dezimalsystem 1˙4142 …. sein?’

107v[4] & 108r[1] 24.01.1940

Eine Zahl nach dem Rhythmus von Schlägen erkennen. – Wie weiß ich, daß, was auf diese Weise gleichzahlig ist, es auch nach der Vergleichsmethode des Zählens ist?

108r[2] & 108v[1] & 109r[1] Man hätte auf die $\sqrt{2}$ so kommen können: Wenn man im Dezimalsystem eine ganze Zahl mit sich selbst multipliziert, so entsteht manchmal ein Produkt mit einer ungeraden Anzahl von Stellen, dessen höchste Stelle 1 ist, welcher unmittelbar eine nicht unterbrochene Reihe von 9^{ern} folgt & endlich noch eine Zahl anderer Stellen; vergrößert man aber die Einerstelle der Faktoren um 1, so wird das Produkt bereits > 2. Liegt uns ein solches Produkt $a \times a = b$ vor, so kann man ein weiteres der gleichen Art konstruieren mit einer längeren Reihe von 9^{ern}, indem man an die Ziffernreihe *a* rechts eine bestimmte Folge weiterer Stellen anhängt. Auf diese Weise erhielt man etwa die Folge: $1 \times 1 = 1$

$14 \times 14 = 196$

141 × 141 = 19881

1414 × 1414 = 1999396 Nun ist es klar, daß man diese Multiplikationen im Strichsystem ausführen kann. Und auch, daß man in diesem System eine Eigenschaft der Produkte nachweisen kann, die darauf hinauskommt, daß die Produkte sich immer mehr einer Zahl 2×102n nähern. – Was aber kann mich sicher machen, daß die Beweise in den beiden Systemen wirklich parallel laufen werden? – Dies kann nicht der Beweis im Strichsystem sein, da ich ja im Dezimalsystem unabhängig von diesem vorgehe. Es ist also denkbar, daß es sich am Ende der Wege zeigt, daß sie nicht parallel liefen. Wie es denkbar ist, daß die Zahlbestimmung mittels eines Rhythmus & die Zahlbestimmung durch Zählen zu verschiedenen Resultaten führt.

109r[2] & 109v[1] 25.01.1940

Aber, wenn man das auch zugibt, – ist es nicht eine Spitzfindigkeit? Kann man nicht sagen: “Der Mathematiker kümmert sich um solche mögliche Unstimmigkeiten nicht. Er setzt voraus – & mit Recht – daß alles auf dem Papier in Ordnung gehen werde.” – Was etwa den Strichkalkül anbelangt, so können wir ja die Striche numerieren & ihre Menge dadurch übersehbar machen &, verlaß Dich nur drauf, es wird dann schon alles mit dem gewöhnlichen Kalkül übereinstimmen!

RFM III 109v[2] Wann sagen wir: ein Kalkül 'entspräche' einem andern, sei nur die abgekürzte Form des ersten? – 'Nun, wenn man die Resultate dieses, durch entsprechende Definitionen in die Resultate jenes überführen kann.' Aber ist schon gesagt, wie man mit diesen Definitionen zu rechnen hat? Was macht uns diese Übertragung anerkennen? Ist sie am Ende ein abgekartetes Spiel? Das ist sie, wenn wir entschlossen sind nur die Übertragung anzuerkennen, die zu dem uns gewohnten Resultat führt.

109v[3] & 110r[1] Wenn wir von 'einander entsprechenden' Kalkülen reden, so denken wir oft an die mögliche *Anwendung* dieser Kalküle & nennen 'entsprechend' solche, die der gleichen Anwendung fähig sind. (Man denkt etwa an irgend eine charakteristische Anwendung des Multiplizierens.) Aber auch dies hilft uns nicht. (Könnte Einer nicht den Beweis für '3 × 3 = 9' als Beweis dafür verwenden, daß '9 × 9 = 81' ist, ich meine: könnte er aus dem Gang jenes Beweises nicht unmittelbar auf '9 × 9 = 81' schließen? Er sagt: "3 × 3 = 9 – also muß ich für 9 Nüsse zu 9 Groschen 81 Groschen zahlen.")

RFM III 110r[2] & 110v[1] Warum nennen wir einen Teil des R'schen Kalküls den der Differentialrechnung entsprechenden? – Weil in ihm alle Sätze der Differentialrechnung bewiesen werden. – Aber doch nicht am Ende post hoc. – Aber ist das nicht gleichgültig? Genug, daß man Beweise dieser Sätze im R.schen System finden kann! Aber sind es Beweise dieser Sätze nicht nur dann, wenn ihre Resultate sich nur in *diese* Sätze übersetzen lassen? Aber stimmt das sogar im Fall des Multiplizierens im Strichsystem mit numerierten Strichen?

RFM III 110v[2] & 111r[1]

26.01.1940

Nun muß klar gesagt werden, daß die Rechnungen in der Strichnotation (SN) normalerweise immer mit denen in der Dezimalnotation übereinstimmen werden. Vielleicht werden wir, um sichere Übereinstimmung zu erzielen, an einem Punkt dazu greifen müssen, die Rechnung mit Strichen von *mehreren* Leuten nachrechnen zu lassen. Und das Gleiche werden wir bei Rechnungen mit noch höheren Zahlen im Dezimalsystem vornehmen. Aber das zeigt freilich schon: daß nicht die Beweise im Strichsystem die Beweise im Dezimalsystem zwingend machen.

RFM III 111r[2] & 111v[1]

“Hätte man aber nun diese nicht, so könnte man jene gebrauchen, um das Gleiche zu beweisen.” – Das Gleiche? Was ist das Gleiche? – Also, der Strichbeweis wird mich vom Gleichen, wenn auch nicht auf die gleiche Weise, überzeugen. – Wie, wenn ich sagte: “Der Platz an den uns ein Beweis führt, kann nicht unabhängig von diesem Beweis bestimmt werden”. – Bin ich durch einen Beweis im Strichsystem davon überzeugt worden, daß der bewiesene Satz die Anwendbarkeit besitzt, die der Beweis im Dezimalsystem ihm gibt – ist, z.B., im Strichsystem gezeigt worden, daß der Satz auch im Dezimalsystem beweisbar ist?

111v[2]

27.01.1940

Ich schlage mich auf diesen Seiten mit einem bestimmten Teufel herum; & der Kampf ist noch unentschieden.

RFM III

28.01.1940

111v[3] & 112r[1] Es wäre natürlich Unsinn zu sagen, daß *ein* Satz nicht mehrere Beweise haben kann – denn so sagen wir eben. Aber kann man nicht sagen: *Dieser* Beweis zeigt daß ... herauskommt, wenn man *das* tut; der andre Beweis zeigt, daß dieser Ausdruck herauskommt, wenn man etwas andres tut. Ist denn z.B. das mathematische Faktum, daß 129 durch 3 teilbar ist, unabhängig davon, daß *dies* Resultat bei *dieser* Rechnung herauskommt? Ich meine: ist das Faktum dieser Teilbarkeit unabhängig von dem *Kalkül* vorhanden, in dem es sich ergibt; oder ist es ein Faktum dieses Kalküls?

RFM III 112v[1] Denke man sagte: "Durch das Rechnen lernen wir die Eigenschaften der Zahlen kennen." Aber *bestehen* die Eigenschaften der Zahlen außerhalb des Rechnens?

RFM III 112v[2] 'Zwei Beweise beweisen dasselbe, wenn sie mich von dem gleichen überzeugen.' – Und wann überzeugen sie mich von dem Gleichen? Wie weiß ich, daß sie mich vom Gleichen überzeugen? Natürlich nicht durch Introspektion.

RFM III 112v[3] Man kann mich auf verschiedenen Wegen dazu bringen, diese Regel anzunehmen.

112v[4] & 113r[1] Kann man in R' Logik beweisen, daß ~100p≡p ist? – Nun warum nicht? "~100p" steht doch nur als Abkürzung statt "~ ~ ~ ~ – – – –p" & man rechnet einfach von 100 bis 1 herunter. Auch, wenn man daran Anstoß nimmt daß sich hundert '~' nicht als solche erkennen lassen, so kann man ja die Stellen der '~' numerieren & sie dadurch übersehbar machen. –

113r[2] 29.01.1940

Numerieren wir die '~' vor p mit den Buchstaben 'a' bis 'r': Ist '~rp' ein R-scher Begriff? (Wie, wenn '~rp' hieße: *viele* Verneinungen von 'p'?)

113r[3] & 113v[1] & 114r[1] Ich bin versucht hier eine *Deutung zu konstruieren*, nach welcher man sagen kann, daß der Sinn der Sätze, die durch die Rechnungen

1000 : 3 = 333 +
1 3
10
10
1

und

10_ 00 : 3 = 333 + 1
3
10
_

bewiesen sind, ein verschiedener ist. D.h.: ich will die Worte "Sinn eines mathematischen Satzes" so deuten, daß dieser Sinn davon abhängt, wie der Satz erhalten wird. So eine Deutung kann natürlich nicht zeigen, daß es *falsch* ist zu sagen, zwei Beweise bewiesen das Gleiche! (Analog kann man sagen, daß verschiedene Kriterien beweisen, daß der Tod vor zwei Stunden eingetreten sei, & doch kann es nützlich sein von verschiedenen Bedeutungen des Ausdrucks "Eintritt des Todes", je nach dem verwendeten Kriterium, zu reden.) Es ist vielmehr ein besonders wichtiges Mittel unserer Sprache zu bestimmen, daß verschiedene Kriterien als Kriterien des Gleichen gelten sollen. –

114r[2] & 114v[1] Aber kann man gegen mich nicht einwenden: daß nur eine *kleine Anzahl* Zeichengeometrischer Prinzipe in der Mathematik angewandt werden, so daß der Unterschied der Berechnungen des gleichen Satzes uninteressant wird. Ich meine: Kommt, was ich sagen will, nicht darauf hinaus, daß jeder neue Beweis des gleichen Satzes schon darum interessant sein muß, weil er eine neue Zeichen-geometrische Methode zeigt. Oder: er überzeugt uns von einer neuen Möglichkeit der Konstruktion.

114v[2] Wohl aber kann nicht so eine neue Methode trivial werden, indem man sie auf trivialem Wege einführt?

Könnte z.B. das Multiplizieren mit Dezimalen nicht als eine triviale Abweichung vom Multiplizieren im Strichsystem dargestellt werden? Ja; aber hörte die Trivialität nicht dann auf, wenn gezeigt wird, daß wir uns in gewissen Fällen auf die zweite & nicht auf die erste Methode verlassen?

115r[1] (Man könnte mein Problem auch so ausdrücken: Ist es richtig die Mathematik als eine Klasse von wahren *Sätzen* aufzufassen?)

115r[2] 30.01.1940

Kann die Strichrechnung mich davon überzeugen, daß die Dezimalrechnung *dies* ergeben wird? In gewissem Sinne doch offenbar!

115r[3] & 115v[1] Ist nicht folgendes ein *starker* Einwand gegen mich: Niemand wird sich die Mühe nehmen, das Kommutative Gesetz für das Rechnen im Dezimalsystem zu beweisen, wenn es für das Strichsystem bewiesen ist. Man wird vielmehr auf diesen Beweis hin sagen, es *müsse* nun auch fürs Dezimalsystem gelten – & käme dort etwas anderes heraus, so müsse man sich verrechnet haben. Daraus folgt: Man wird in diesem Falle dem Resultat einer Multiplikation im Dezimalsystem weniger trauen als einem Induktionsbeweis im Strichsystem.

115v[2] Und damit hängt diese Frage zusammen: Sind es nur *so uninteressante* Fälle, wie z.B. lange Sätze im Dezimalsystem, in denen die 'kürzere' Rechnungsweise mehr als eine ganz triviale Transformation der 'langen' ist.

115v[3] & 116r[1] Kann man nicht sagen, daß alle *interessanten* Sätze über die Kardinalzahlen (& daher alle Sätze über die Zahlen) im Strichsystem überzeugend bewiesen werden können & daher jedes andere System nur das Interesse der *Kürze* hat?!

116r[2] Aber, wenn wir nun z.B. das Kommutative Gesetz im Strichsystem bewiesen haben, ist es dann nicht von höchstem Interesse, daß die Rechnungen im Dezimalsystem – so gut wie immer – diesen Beweis befolgen? Und nicht nur darum weil man also so *kürzer* rechnen kann, sondern weil man also auch *anders* rechnen kann.

116r[3] & 116v[1] Man könnte fragen: Wie ist es denn möglich, daß uns der Skolemsche Induktionsbeweis des Distributiven Gesetzes allgemein von diesem Gesetze überzeugt? Wäre – könnte man sagen – diese Überzeugung, was sie ist, wenn nicht beim Rechnen (etwa im Strichsystem) tatsächlich normalerweise dies Gesetz, bestätigt würde? – Nun, man kann sagen: der Induktionsbeweis überzeugt uns davon, daß wir zu sagen haben

$a + (b + c) = (a + b) + c$ & kommt das im besondern Fall nicht heraus, so haben wir einen Fehler anzunehmen. Wohl, aber das wäre also unter Umständen eine sehr unpraktische Regel & eine, die anzunehmen kein Grund vorhanden wäre.

117r[1] Es gibt aber nun doch *mehr* oder *weniger* triviale Ersetzungen & Abkürzungen!

117r[2] Der Bescheidene, der sich selbst mitzuzählen vergaß.

117r[3] 31.01.1940

Es sei π_{100} die 100-stellige ganze Zahl: 314159.... Ist dann der Beweis, das $\sim\pi 100 p \equiv p$ ist (oder das Gegenteil) ein R'scher Beweis, da doch dieser Satz der Logik nur eine Abkürzung eines R'schen Satzes ist?

117r[4] Nun, der Beweis involviert eine neue Technik der Zahlbestimmung – wie man sagen könnte. Aber statt des allgemeinen Ausdrucks "Zahlbestimmung", wäre es besser einen ganz speziellen zu verwenden für die Bestimmung der Menge der Negationen.

117v[1] Lenkt nicht das Wort “Abkürzung” unsre Aufmerksamkeit – wie ein Taschenspielertrick – auf den unwichtigen Gegenstand? Freilich ist “~π100p” kürzer als (die entsprechende Reihe) “~ ~ ~ .....p”; aber doch nur (darum), weil, z.B., der Buchstabe π ein so kurzes Zeichen ist. Wie, wenn wir statt seiner einen Linienzug verwendeten, (der) komplizierter (wäre), als die ganze Reihe der Negationszeichen?

117v[2] & 118r[1] – Aber man könnte doch auch sagen: “Die Rechnung die “~π100p” in die Form der Reihe umwandelt, zeigt bloß, was “~π100p” bedeutet, *sie* ist bloß die Übersetzung von einer Ausdrucksweise in eine andere – & auf diese Übersetzung folgt nun *der Russellsche Beweis*.”

118r[2] (Wenn man diesen Weg geht, könnte man noch einen Schritt weiter gehen & sagen, daß der R’sche Beweis dann einen Satz beweist, der *nichts* sagt.)

118r[3] Aber warum soll ich das ‘Übersetzen’ von einer Ausdrucksweise in eine andre nicht auch einen Beweis nennen? der zeigt, daß *diesem* Ausdruck in der einen Ausdrucksweise *dieser* in der andern entspricht.(So kann man Einem mittels des Wörterbuchs & der Grammatik beweisen, daß dieser deutsche Satz auf Englisch *so* heißt.

VB 01.02.1940

118r[4] & 118v[1] ‘Zweck der Musik: Gefühle zu vermitteln.’

118v[2] Verbirg dir nie, daß du in Schwierigkeiten bist.

VB 118v[3] Damit verbunden: Wir mögen mit Recht sagen “er hat jetzt das gleiche Gesicht wie früher” – obwohl die Messung in beiden Fällen Verschiedenes ergab. Wie werden die Worte “der gleiche Gesichtsausdruck” gebraucht? – Wie weiß man, daß Einer diese Worte richtig gebraucht? Aber wie weiß ich, daß *ich* sie richtig gebrauche?

118v[4] & BCr[1] ‘Ich *fühle*, daß ich das Wort “rot” richtig gebrauche.’ Nun, das kann man schon sagen. Nur ist es jetzt interessant zu untersuchen, was mit diesem Satz *nicht* gemeint ist.

BCr[2] Die unerfüllte Sehnsucht in der Philosophie: ‘Ich will Rot beschreiben, kann es aber nicht’. Sehn’ ich mich nach dem, wonach man sich nicht sehnen *kann*? Wenn ich in einem Kreis herum liefe, immer schneller – & sagte, ich wollte mich fangen – soll man dann sagen, ich versuche mich selbst einzuholen – oder soll man es nicht sagen?

BCr[3] 03.02.1940

Es heiße ‘en’ die nte Stelle der Zahl e; dann hat – so sagte ich einmal – der Satz: “ich habe 2 Hüte” den selben Sinn, wie: “ich habe e1 Hüte”. Aber hat auch “$\sim \sim p \equiv p$” den selben Sinn wie

“$\sim e1 p \equiv p$”?

[→ *Fortgesetzt in Band XIII.*]