Wittgenstein's Writings

Ms-162a

Ms-162a

Ludwig
Wittgenstein

1[1] & Ich entfalte doch die geometrischen Eigenschaften dieser Kette
2[1] auch indem ich die Umformungen einer andern gleich gebauten Kette vorführe. Aber dadurch zeige ich doch nicht was ich tatsächlich mit der ersten tun kann, wenn diese sich nämlich tatsächlich als unbiegbar oder sonst wie physikalisch ungeeignet erweist. Also kann ich doch nicht sagen: ich entfalte die *Eigenschaften dieser Kette*.

2[2] Wie kann man den Eigenschaften der Kette entfalten, die sie gar nicht hat?

2[3] & 'Wir entfalten die Eigenheiten des hier gezogenen Vielecks.'
3[1] Nehmen wir an das Vieleck wäre aus Draht gebogen, statt gezeichnet; wären wir noch (ebenso) geneigt zu sagen: wir entfalteten die Eigenschaften des gebogenen Drahtes? Wir entfalten sie soll hier doch heißen, wir führen sie vor Augen, machen sichtbar, was früher nicht deutlich war.

3[2] & Ich messe einen Tisch & er ist 1 m lang. – Nun lege ich meinen
4[1] Meterstab an einen andern Meterstab. Messe ich ihn dadurch? Finde ich daß jener zweite Meterstab 1 m lang ist? Mache ich das gleiche Experiment der Messung nur mit dem Unterschied daß ich des Ausgangs sicher bin?

4[2] & Ja wenn ich den Maßstab an den Tisch anlege, messe ich immer
5[1] den Tisch, kontrolliere ich nicht manchmal den Maßstab? Und worin liegt der Unterschied des Vorgehens?

5[2] Ich entfalte die Eigenschaften dieses Vielecks, heißt hier, ich zeige, z.B., daß es 15 Ecken hat. Ähnlich als sagte ich: ich entfalte die Länge & Breite dieses Papiers indem ich das Papier auseinanderfalte.

5[3] Das Entfalten ist hier eine Art Zählen.

6[1] Das Experiment des Entfaltens einer Reihe kann uns, unter anderem, zeigen aus wie vielen Kugeln die Reihe besteht, oder aber, daß wir diese (sagen wir) 100 Kugeln so & so bewegen können. Die Rechnung aber des Entfaltens zeigt uns was wir eine Umformung durch bloßes Entfalten nennen.

6[2] & “Ich entfalte die Eigenschaften dieser Kette, ich zeige, was man
7[1] & alles aus ihr machen kann.” – Was man alles durch bloßes
8[1] Biegen in den Gelenken aus ihr machen kann. Nun ich könnte sagen: ich zeige nicht nur physikalische, sondern auch geometrische Eigenschaften der Kette. Könnte man sagen: Die Glieder dieser Kette sind zwar so zusammengeschweißt, daß man sie nicht in diese Stellung bringen kann, aber es ist doch eine geometrische Eigenschaft dieser Kette daß man sie in diese Stellung bringen kann.

8[2] Höchstens, daß man sie … bringen könnte, wenn die Glieder nicht ….

8[3] Die Eigenschaft ist etwa die, daß die Kette aus 10 Gliedern besteht.

8[4] & 9[1] "Ich zeige Dir was man alles aus dieser Kette machen kann." Dabei nehme ich als selbstverständlich an, daß die Glieder sich bewegen lassen nicht brechen, sich nicht vermehren etc. – Zeige ich Dir nun nicht Eigenschaften der Kette? Aber *welche* von den vielen Eigenschaften der Kette zeige ich? Ist es denn noch eine Kette, wenn sie – aus *irgend* einem Grunde – steif ist, wie ein Stab?

10[1] ~~Stimmt die Logik mit $2 \times 2 = 4$ überein? Man kann $2 \times 2 = 4$ mit ihr in Übereinstimmung bringen, aber auch $2 \times 2 = 5$.~~

10[2] Stimmt $2 \times 2 = 4$ mit dem logischen Kalkül überein? Man kann $2 \times 2 = 4$, aber auch $2 \times 2 = 5$, mit ihm in Übereinstimmung bringen. (Und ich meine: $2 \times 2 = 5$ kann unter Umständen ein brauchbares arithmetisches Sätzchen sein.)

10[3] & 11[1] Aber es kann doch nicht $2 \times 2 = 4$ & $2 \times 2 = 5$ wahr sein, es sei denn, daß "2" oder ' $\times$ ' oder ' $=$ ' in den beiden Systemen verschiedenes bedeuten! Soll das heißen: daß in einem Fall $2 \times 2 = 4$ im andern $2 \times 2 = 5$ ist sei das *Kriterium* dafür, daß in den beiden jene Zeichen verschiedene Bedeutung hätten. Oder lehrt die Erfahrung, daß unter solchen Umständen die Zeichen immer verschiedene Bedeutung haben? Davon später mehr.

12[1] Was nennen wir Eigenschaften einer Zahl, Eigenschaften eines Satzes?

12[2] & 13[1] Damit daß wir ein Begriffswort bilden z.B. “mathematischer Satz” & für das Wort auch eine Verwendung haben, die uns geläufig ist, sind wir noch nicht im Stande zu sagen, wie wir, gegeben die rechten Umstände, geneigt sein werden es anzuwenden.

D.h. wenn ich eine neue Situation an Dich heranbringe wirst Du eine neue Entscheidung über seinen Gebrauch treffen müssen, oder auch erkennen, daß Du ‘nicht umhin kannst’ es hier so zu gebrauchen, hier *diesen* Weg einzuschlagen. (Etwa zu sagen “es gibt keine Konstruktion der Dreiteilung des ∢ mit Lineal & Zirkel”.)

13[2] & 14[1] Und so bringt auch Cantors Beweis eine neue Situation an uns hervor & die Frage ist: “Was sollen wir nun sagen?”

14[2] [Auch Kontradiktionen könnten unter Umständen richtig, oder wahr, genannt werden.]

14[3] [Zu zeigen, daß die internen Beziehungen von Sätzen, die ‘Operationen’ die einen Satz aus einem andern erzeugen, nicht ‘abzählbar’ sind. Dadurch fällt ein Licht auf den Begriff ‘Operation’.]

15[1] [Freiheit]

15[2] [“Bist Du Dir auch des Unterschiedes bewußt …”]

15[3] Ist ein Kalkül allgemeiner als ein andrer? Worin besteht die ‘Allgemeinheit’ des Mengenkalküls? Nicht darin, daß er ein einfaches Bild einer Klasse andrer (‘spezieller’) Kalküle ist? Ist er ohne Beziehung auf diese auch allgemein?

16[1] & 17[1] Worin besteht die ‘enlightened simple-mindedness’ von der Littlewood spricht? Besteht sie nicht darin zu glauben, daß die sogenannte *allgemeine* mathematische Untersuchung Wahrheiten ans Licht bringt, die von den spezielleren Untersuchungen nur noch ins Kleine ausgeführt werden. Während der allgemeine Kalkül nur dadurch ‘allgemein’ ist daß er sich auf spezielle Kalküle bezieht. Weil in der Mathematik nichts im *Wort* liegt sondern alles im Kalkül. D.h. weil das Zeichen in die reine Mathematik keine andre Bedeutung mitbringt, als der Kalkül selbst sie ihm gibt.

17[2] & 18[1] Die Mathematik besteht nicht aus Betrachtungen. Und ‘abstrakt’ kann man einen Teil der Mathematik nur nennen, insofern seine Anwendung zwar angedeutet aber vag gelassen ist.

VB 18[2] [Was fehlt der Mendelssohnschen Musik? Eine ‘mutige’ Melodie?]

18[3] & 19[1] Wenn Du sagst: “aber Mathematik muß doch eine Art der Physik sein!”, so sage ich: dann ist sie eine Physik ihrer Symbole, d.h., sie hat ihre physikalische Bedeutung (Pascal) für die Symbole die Bilder, die sie empfiehlt.

19[2] ‘Diese Überlegung zeigt, …’ Wie kann eine Überlegung etwas zeigen?

19[3] D.h. ich wünsche, daß Du Dir die Mathematik in jedem Stadium als komplett (Referrent), & jeden neuen Kalkül nicht als eine Entdeckung sondern als neue Erfindung denkst.

20[1] ‘Ich will Dir in dieser Menge von Operationen ein Loch zeigen.’

20[2] 06.01.1939

Zu welchem *alltäglichen* Zwecke ließe sich die Cantorsche Rechnungsart gebrauchen? Es ist leicht verständlich im Fall einer endlichen Anzahl von Zahlen.

21[1] Wir wollen uns die Cantorsche Bildungsweise von D′ eingeführt denken zu einem *praktischen* Zweck. (Dies natürlich aus Gründen der Klärung unsrer Grammatik, & es darf daher diese praktische Anwendung eine noch so phantastische sein.)

21[2] & Als erstes fällt mir ein das Cantorsche Verfahren als Lösung
22[1] eines Scherzrätsels. Ich sage: "ich habe alle Kombinationen von Stellen in unendlichen Reihen angeschrieben – zeige mir eine Kombination die ich nicht angeschrieben habe."

22[2] & Eins ist klar: Wenn jemand sagte: "Wer weiß– vielleicht kann
23[1] man gar keine reellen Zahlen außer diesen mehr bilden, weil schon alle Kombinationen von Stellen erschöpft sind" – so kann man ihm, nach Cantor, antworten: Nein, denn wenn Du ein Gesetz angibst, das D′ erzeugt so wirst Du sagen, daß es eine von allen diesen verschiedene Zahl erzeugt.

23[2] & Das heißt: die Cantorsche Demonstration ist eine richtige
24[1] Antwort auf jenen unsinnigen Einwand. Aber nicht, weil sie eine neue Kombination zeigt, die man früher nicht gesehen hatte, sondern weil sie zeigt, was man in so einem Fall, eine von allen diesen verschiedene Zahl nennt & *was* hier also 'Bildung einer neuen Kombination' zu nennen wäre.

24[2] Es kann z.B. einen Beweis geben, daß π von den algebraischen Zahlen *'diagonal verschieden'* ist.

25[1] & 26[1] & 27[1] Unser Ausdruck muß nur dort von einer besonderen Exaktheit sein, wo sie den *psychologischen* Punkt genau treffen muß. Wir verfassen kein gerichtliches Dokument, in dem wir der Gegenpartei jeden Einwand verstopfen wollen. Denn wer sich nicht gutwillig überzeugen läßt, den *wollen* wir gar nicht überzeugen.

27[2] [Hierher gehört auch der Satz von den ‘Fahrgeleisen’.]

27[3] & 28[1] Nun geht aber Cantor ja noch weiter: er sagt nicht nur, man könne keinen Grund haben zu sagen: *dies* seien nun *alle* reelle Zahlen; sondern, er zeigt uns auch eine reelle Zahl die von allen diesen verschieden sei; nämlich die Zahl “diagonal verschieden von ...”.

29[1] & 30[1] Warum verwendet z.B. Hardy nicht die logische Demonstration, wenn er zeigen will, es gäbe außer den rationalen noch andere Zahlen? – Etwa weil das Argument auf dieser Stufe zu schwierig ist? Nicht darum, weil, was dabei herauskommt, nicht eigentlich wie eine weitere *Zahl* aussieht? (Er hätte auch die Zahl 0˙01001000100001 ... anführen können die offenbar kein periodischer Dezimalbruch ist.) Er wollte etwas vorzeigen, womit man *mißt.*

30[2] Der allgemeine Satz mag sagen, was alle speziellen sagen, aber die allgemeine *Technik* tut nicht was alle besonderen Techniken tun.

30[3] & 31[1] Indem ich Dich lehre einen Ziegelstein auf einen andern zu legen, lehre ich Dich nicht ein Haus bauen, – da ich Dich doch die allgemeine Form des Häuserbauens gelehrt habe.

31[2] Wir sagen: Wenn man von einer Technik des Entwickelns zeigen kann, daß ihre Resultate mit denen eines Systems von Entwicklungen diagonal nicht übereinstimmen, so *sagen* wir: die Technik habe ein von den Entwicklungen des Systems *verschiedenes Resultat*.

32[1] Kann man also zeigen, daß die Entwicklung von $\sqrt{2}$ mit den Entwicklungen der Brüche diagonal nicht übereinstimmt, so sagt man: $\sqrt{2}$ erzeuge eine von jenen andern verschiedene Entwicklung.

32[2] & 33[1] Wie ist es nun mit der Technik des Entwickelns: ‘Addiere 1 zu jeder Stufe der Diagonale des Systems.’ Das *ist* doch eine Technik des Entwickelns. Und ist es nicht wahr, daß ihre Resultate diagonal mit den Entwicklungen des Systems nicht übereinstimmen? – Die Umstände sind hier ganz anders, (ich habe eine ganz neue Art der Regel eingeführt) also *muß* ich hier nicht dasselbe sagen. Aber ich *kann* dasselbe sagen & also D’S eine von allen Zahlen des Systems verschiedene Zahl nennen.

33[2] & 34[1] & 35[1] Woher aber das eigentümliche Gefühl, daß zwar $\sqrt{2}$ eine Zahl sei, weil sie – wie ich zu sagen versucht bin – ihre ganze unendliche Entwicklung schon voraussieht, dagegen D’S eigentlich keine Zahl sei, weil hier immer nur das Stück vorhanden ist, was ich gerade bilde? – Aber worin liegt es denn, daß die $\sqrt{2}$ (z.B.) ‘ihre ganze Entwicklung voraussieht’? Oder, daß die $\sqrt{2}$ – sozusagen – schon *fertig* ist, schon fertig da ist, wenn auch ihre Entwicklung nur im Gang ist?

35[2] & Oder: Wie kommt es, daß wir nicht versucht sind zu sagen, die
36[1] Zahl π kennen wir nur beiläufig, da wir ihr Zahlzeichen nie ganz anschreiben können. Warum erscheint uns hier die Entwicklung gleichsam als ein Nebenprodukt der Zahl; während die Entwicklung im Fall D'S das ein & alles der Zahl zu sein scheint? Doch offenbar, weil im Fall von π das Bilden der Entwicklung wirklich nur ein kleiner Teil des Kalküls mit π ist, weil also das Zeichen π in einem ausgedehnten Kalkül eingebettet ist (der ihm seine Bedeutung gibt), während D'S nichts weiter ist als eine Technik zur Bildung von Dezimalstellen.

36[2] & "Der Kalkül gibt dem Zeichen seine Bedeutung" heißt: *Der*
37[1] & *Kalkül* zeigt, wozu ein Zeichen dient – nicht sein Aussehen,
38[1] nicht ein Bild das sich mit ihm verbindet, nicht ein *Teil* bloß des Kalküls. (So wie man sagen kann: wenn Du die Konstruktion eines Hauses verstehen willst schau nicht nur auf die Fassade – obwohl diese *manchmal* über den Bau Aufschluß geben kann.)

38[2] & Angenommen, wir hätten nur mit periodischen
39[1] Dezimalbrüchen gerechnet; & nun wäre auf *diese* Grundlage die Cantorsche Erfindung gesetzt worden – ist es klar, daß wir uns entschlossen hätten, die neuen Regeln zur Bildung von Ziffernreihen 'Zahlen' zu nennen? Hätte man sie etwa neue '*Brüche*' genannt?

39[2] Es ist die große Diversität dessen, was wir reelle Zahlen nennen, was uns die Zahlen D'S schlucken läßt.

39[3] "... also *müßte* ich hier nicht dasselbe sagen" – d.h.: hier ist der Weg durchaus nicht klar vorgezeichnet.

39[4] & 40[1] & 41[1] & 42[1] Wenn ich nun aber erkläre auch die Regel D′S habe als Zahl zu gelten – – aber eh′ ich darauf eingehe: *Muß* nicht die Regel D′S jedenfalls als neue *Regel* gelten? Ja, aber *das* ist DS auch. Es muß heißen: Ist nicht das Resultat der neuen Regel jedenfalls ein neues Resultat? D.h.: ich brauche es nicht Zahl zu nennen, muß aber doch zugeben, daß ich eine neue Extension vor mir habe. Aber eine Extension ist die Extension nur von einer Regel; & ich machte die Übereinkunft, etwas eine von den Extensionen von S verschiedene Extension einer Regel zu nennen, wenn es sich zeigen ließe, daß die Extension *ein* D′S sei (D′S ist Prädikat). Und da kommt es drauf an was ich “Regel” & “zeigen lassen” nennen will. Ich könnte ohne weiteres sagen: ich wolle nicht sagen es ‘ließe sich zeigen’, daß D+1 ein D′ sei. Aber ich *kann* wieder D+1 ein D′ nennen & also sagen, ich habe vermittels der Cantorschen Methode eine Regel mit neuer Extension abgeleitet. Und dann habe ich also einen Begriff der Regel gebildet, den man nicht in ein System ordnen kann.

42[2] Und das ist nun nichts so besonderes.

43[1] (Sandhaufen, nächst größere Länge etc.)

43[2] 08.01.1939

126 → 13 , → 27 , → 16 , → 233 , → 18

43[3]

43[4] Wie zeigt man, daß ... alle Permutationen von a b c d sind? Wie zeigt man daß man ... so in eine Reihe ordnen kann?

43[5] & Es müßte heißen: Nun führen wir einen Begriff ein, von dem es
44[1] keinen Sinn hat zu sagen, er werde in ein System gebracht. (Nicht eine Entdeckung – eine Erfindung.)

44[2] Jede ‘Eigenschaft einer Zahl’ entspricht einer endlosen Technik des Erzeugens einer Zahl aus andern. Wenn man nun solche Techniken in eine Reihe ordnet, so zeigt uns die Reihe neue Techniken an.

45[1] Eine Eigenschaft einer Zahl, (das) ist – möchte ich sagen – ihre Beziehung zu andern Zahlen.

45[2] 09.01.1939

Wir behandeln die Grammatik des Wortes “Technik”.

45[3] & Wenn wir sagen: “Die Differentialrechnung handelt gar nicht
46[1] von unendlich Kleinem”, so müßte es vor allem heißen, daß eine Rechnung noch nicht von etwas handelt; dann aber daß die charakteristische *Anwendung* der Rechnung sich nicht, – wie der Ausdruck “unendlich klein” erwarten läßt – auf winzig Kleines richtet. Aber ebenso richtet sich die *Anwendung* der Mengenlehre nicht auf ungeheure Mengen!

46[2] & Kann ich sagen: “Wenn ich horizontale Techniken gelernt habe
47[1] & die Technik der Bildung neuer in vertikaler Richtung, so habe ich damit die Technik der Bildung von DS oder D’S gelernt”? – Nun, habe ich sie denn damit schon gelernt? Nein. – Aber Cantor lehrt sie mich durch sein Schema, (das ja neu ist.) D.h.: dieses Schema bringt auf neue Möglichkeiten von Operationen z.B. auf die von DS, & auch auf eine neue Möglichkeit der Begriffsbildung ‘Operation’.

47[2] & “Technik, die ein von den S verschiedenes Resultat liefert”
48[1] nenne ich eine, die ein D’S hervorbringt. Nach dieser Definition nun kann ich nicht sagen D’S stehe für eine Technik die ein von den S verschiedenes Resultat hervorbringt.

48[3] & Es ist etwa, wie wenn Einer glaubt, jede unendliche
49[1] Dezimalzahl *müsse* sich einmal wiederholen (& dies ist man als Anfänger manchmal geneigt zu glauben) & wir zeigen ihm nun die Reihe

0˙1011011101111 … & er verläßt seine frühere Auffassung.

49[2] Es scheint Cantor lehrt mich keine neue Technik; er braucht mir nur das Bild zu zeigen, & ich kann sie schon; er nenne mir nur eine die ich schon kannte. Aber das Schema ist *neu* & bringt etwas neues in Vorschlag wenn wir den Vorschlag allerdings auch gleich verstehen.

49[3] & Wie man umgekehrt eine Technik D’S kennen könnte ohne die
50[1] S zu kennen.

50[2] & Wie, wenn man von allen hergebrachten reellen Zahlen absieht,
51[1] & mit

beginnend, Reihen D’S erzeugt (wobei immer 0 in 1 & 1 in 0 verändert wird). Ich sage nun: wenn ich das D’S immer wieder dem System hinzufüge & ein neues D’S bilde, so lassen sich die so entstehenden D’S nicht in eine Reihe ordnen. Aber die *so* entstehenden D’S *lassen* sich doch in eine Reihe ordnen.

51[2] & 52[1] Man kann ‘sie’ nicht in eine Reihe ordnen, – wer sind die *sie*, die man nicht ordnen kann? Ich habe eine Begriffsbestimmung gemacht, in der ich die *Ordnung* ausgeschlossen habe, indem ich bestimme, jede Ordnung sei immer nur als *Teilordnung* anzusehen; nun darin ‘*kann*’ man diesen Begriff nicht ordnen. Der Schein der Unmöglichkeit (des NichtKönnens) entsteht hier durch die *Art* wie wir den Begriff einführen. Indem die Bestimmung, die das Ordnen ausschließt, nachträglich wie eine Entdeckung über den schon fertigen Begriff eingeführt wird.

53[1] Wenn ich also jemand die Technik lehre Brüche zu bilden so habe ich ihn so viele zu bilden gelehrt wie Kardinalzahlen im Dezimalsystem! Lehre ich ihn aber die Technik, die D’S zu bilden, so lehre ich ihn *mehr* Zeichen bilden, als Kardinalzahlen!

53[2] & 54[1] Wenn die C’sche Demonstration etwas seltsames zum Vorschein bringt, dann eine seltsame Begriffsbestimmung. Wenn hier eine *Entdeckung* vorliegt, so eine psychologische.

54[2] & 55[1] Es ist klar, welchen Zweck es haben kann, zu beweisen daß (z.B.) π ein D’S der algebraischen Zahlen ist: aber welchen Zweck kann es haben eine von den S verschiedene Regel wegen ihrer D’-Verschiedenheit wegen einzuführen? D.h.: wie kann man in den Fall kommen, eine von den Regeln S verschiedene Regel, bloß ihrer Verschiedenheit wegen, zu bedürfen?

55[2] & Nun, ich könnte mir *den* Fall denken: jeder einer Klasse von
56[1] & Leuten schreibt zu irgend einem Zweck sukzessive die Stellen
57[1] & von π,$\pi 2$,$\pi 3$ etc. hin; ich soll nun eine Reihe hinschreiben die
58[1] einerseits auf eine andre Art als die Reihen πn gewonnen wird, anderseits soll ich mit Sicherheit versprechen können daß binnen so & so viel Stellen meine Reihe mit irgendeiner beliebig gewählten Reihe πn nicht übereinstimmen wird. Könnte man die Reihe D'S hier ein neues System der Numerierung nennen. Und zwar *nicht* allein ihrer Extension wegen, denn das geht nicht, aber zusammen mit ihrem Titel 'D'S'? Man würde dann sagen: zu einer neuen Numerierung gehört erstens eine andere Technik des Erzeugens & zweitens die Nichtübereinstimmung mit den Entwicklungen des Systems binnen einer angebbaren Zahl von Stellen.

59[1] D'S kann man nicht ein anderes '*Muster*' nennen als die Entwicklungen S. Z.B. in

ist D'S = 0˙0000 … aber 0˙0000 … ist nicht ein andres Muster als 0˙0000 … wenn einmal lauter 0 folgen einmal irgendwo eine 1.

59[2] & Wozu dient mir eine Technik der Entwicklung, die mit allen
60[1] den S diagonal nicht übereinstimmt.

60[2] In der Mathematik werden Gerüste konstruiert. – – – Ob & wozu sie dann zu gebrauchen sind, ist nun eine weitere Frage.

60[3] & 61[1] So untersucht die Mathematik auch nicht ein Kontinuum (nämlich etwa das ‘mathematische Kontinuum’) sondern *konstruiert* einen Begriff des Kontinuums d.h.: sie stellt gewisse Regeln für den Gebrauch der Worte ‘Kontinuum’ ‘kontinuierlich’, etc., auf; & es fragt sich nun, ob & inwiefern, das so gebildete Spiel mit Worten nützlich ist bei der Beschreibung eines kontinuierlichen Tatbestandes.

61[2] & Wieviele Kardinalzahlen hat der anschreiben gelernt der (wie
62[1] & wir alle) gelernt hat das Dezimalsystem zu beherrschen, oder
63[1] & wieviele Multiplikationen hat er auszuführen gelernt? Das
64[1] & könnte man in zwei Weisen beantworten. Entweder indem man
65[1] die Zahl der Multiplikationen nennt, die er *beim Unterricht* ausgeführt hat. Oder die Antwort ist: “Er kann *beliebig viele* Multiplikationen ausführen”. (Und nun entschließt man sich etwa dazu “beliebig viele” ein Zahlwort zu nennen.) Kann der nun mehr Rechnungen oder gleichviele Rechnungen als ich, der nicht, wie ich nur beliebige Multiplikationen, sondern auch beliebige Divisionen ausführen kann? Es scheint, er kann mehr, aber anderseits kann er doch auch nur *beliebig viele* Rechnungen ausführen, also ebensoviele wie ich. Was zeigt dies nun? Zeigt es irgend etwas anderes, als daß es dumm ist hier nach *der* Analogie mit den Zahlwörtern zu suchen, wo es offenbar verschiedene Wege gibt, die man ‘die Fortsetzung des alten Weges’ nennen kann. Und sagt man nun: wir beide hätten gleichviele Rechnungen ausführen gelernt, so ist das nicht der Ausdruck einer Entdeckung über das Wesen der Unbegrenztheit, sondern eine Bestimmung über den Gebrauch des Ausdrucks “gleich viel” in Verbindung mit dem Ausdruck “beliebig viele”. Eine Bestimmung die, wahrscheinlich, zweckmäßiger anders getroffen worden wäre.

65[2] & Aber was soll man auf die Frage antworten: “Wieviel
66[1] Kardinalzahlen gibt es?” – Warum sollte man nicht die Antwort vorschreiben: “Diese Frage heißt nichts”? – Aber hat denn die Frage keinen Sinn? Nicht, wenn Du ihr keinen Sinn gibst. Und angenommen, Du setztest die Antwort fest: “Unbegrenzt viele”, so ist damit noch nicht bestimmt wie Du diesen Ausdruck nun noch weiter gebrauchst.

66[2] & In der Mathematik werden Begriffsbestimmungen gemacht,
67[1] nicht die Eigenschaften von Begriffen gefunden. [→] Es sei denn, Eigenschaften, wie die Zweckmäßigkeit.

67[2] Eine Technik ‘*handelt*’ von nichts. Man mag sie aber mit Hinblick auf die & die Anwendung lehren. Es wäre seltsam, eine Technik des Schleuderns, z.B., eine allgemeine Technik zu nennen, weil sie allerlei verschiedene Verwendungen hat.

67[3] & “Viele Äpfel + 2 Äpfel = Viele Äpfel”. – Angenommen Einer
68[1] sagte: “Viele Äpfel + 2 Äpfel > Viele Äpfel”! – “Aber es ist doch offenbar daß Viele & 2 wieder *viele* sind & daß es mehr als viele nicht gibt.” – Mache eine andere Begriffsbestimmung.

68[2] & ‘Eigenschaft einer Zahl’

69[1] 0’a = b

Man zeigt, daß die Operationen mit Kardinalzahlen nicht abzählbar sind, indem man zeigt daß jedem System S solcher Operationen eine neue Operation D’S entspricht. Dann sind aber auch die Sätze der Arithmetik nicht abzählbar. Dagegen sind aber die in Russells System beweisbaren Sätze abzählbar.

69[2] & Wenn wir die Zeichen Russells als Ziffern auffassen, so wird
70[1] jeder seiner Sätze ein Zahlzeichen & jeder seiner Beweise eine bestimmte Konstruktionsart einer Zahl (aus den Zahlen der primitive propositions). Wir könnten jeden solchen Satz schreiben: "die Zahl n ist aus r, s, t, u, beweisbar" wo Beweisbarkeit eben eine Eigenschaft von Zahlen ist.

70[2] 12.01.1939

Multiplikation & *Division*. Division hat größere Mannigfaltigkeit; sie zeigt auch, daß $a \times b$ *nicht* c ist.

70[3] Beweise in meinem W-F System, daß etwas *keine* Taut. & keine Cont. ist.

70[4] & Was heißt es einen R'schen Beweis einmal als Beweis des
71[1] R'schen Satzes, einmal als Beweis seiner Beweisbarkeit aufzufassen?

71[2] Wie operiert man mit dem Russellschen Satz, wie mit dem Satz, er sei beweisbar? Oder analog: Wie operiert man mit der Taut. (p) & anderseits mit einem Satz p = taut.? Sagen sie nicht verschiedenes? Nun ja; es sagt ja jeder sich selbst, d.h., was man liest, wenn man ihn liest. Aber nun fragt es sich, welchen Gebrauch man von den beiden macht.

72[1] Aber jedenfalls ist doch die Verneinung des einen nicht die Verneinung des andern! Denn wenn $\vdash p \supset p \;.=.\; p \supset p = \text{taut.}$, dann kann man fragen: was ist nun das Negativ des Satzes "$\vdash p \supset p$"? Besagt es, daß der Satz nicht beweisbar ist, oder daß sein Gegenteil beweisbar ist?

73[1] Endlose Melodie

73[2] Unendliche Erlaubnis Unendlicher Wunsch

73[3] Welcher Teil der Mathematik wäre insbesondere auf eine unendliche Baumreihe anzuwenden? Hat der Satz Sinn: "Diese Baumreihe hat kein Ende"? (Warum sollte man nicht, z.B., eine kreisförmige Baumreihe so nennen?) Kann man etwas mit ihm anfangen, so hat er Sinn.

73[4] & 74[1] Kann man sich unendlich viel Geld wünschen? Wie weiß man es, wenn der Wunsch erfüllt ist?

74[2] Wie, wenn jemand sagte: "Russell behauptet durchaus nicht daß der Satz beweisbar ist; sondern er behauptet einfach die Sätze, ihre Wahrheit"?

74[3] "Russell behauptet nur: 'Es regnet, oder es regnet nicht'."

74[4] & 75[1] 'Es ist wohl wahr, Russell behauptet nur Tautologien; aber er behauptet nicht daß es Tautologien sind. Angenommen R. macht einen Rechenfehler, so behauptet er am Ende etwas, was keine Tautologie ist.' 'Russell behauptet nur am Ende eines Beweises; aber er behauptet nicht daß dies bewiesen wurde.'

75[2] Wie aber wenn ich sagte: 'Russell interessieren nur Tautologien; er gibt uns also eine Liste von Tautologien, oder auch die Behauptung, daß dies alles Tautologien seien'?

75[3] & Wenn Du R. widersprechen wolltest, wie würdest Du es tun:
76[1] indem Du behauptest, daß ein Satz der Principia Mathematica nicht beweisbar sei, oder, daß sein Gegenteil beweisbar sei. Oder: Hätte R. unrecht nur wenn das Gegenteil seines Satzes beweisbar wäre, oder auch, wenn sich der Satz als nicht beweisbar herausstellte.

76[2] Welches ist also das Gegenteil einer R'schen Behauptung?

77[1] & Wie wäre es nun mit einem Satz, als dessen Beweis nicht der
78[1] & Beweis seiner Beweisbarkeit, sondern der Beweis seiner
79[1] Unbeweisbarkeit in *einem gewissen* System wäre? Nun wir hätten hier eine etwas seltsame Ausdrucksweise vor uns. Ein solcher Satz wäre z.B. "$\vdash p \supset q$". Warum soll ich nicht festsetzen, daß der Beweis des Satzes $\vdash p \supset q$ die Demonstration sein solle, daß "$p \supset q$" keine Tautologie ist? Wir haben dann der mathem. Logik einen Satz hinzugefügt, der a) sich beweisen läßt, b) mit keiner Tautologie äquivalent sein kann; denn sagten wir von irgend einer, sie wäre eigentlich der gleiche mathematische Satz so ließe er sich also dadurch beweisen, daß man zeigt, er sei eine Taut., & auch er sei keine Taut.

79[2] & Frage: Ist der Satz "$\vdash p \supset q$", der aussagt, daß der selbst keine
80[1] Taut. ist, ein neuer Satz der Mathematik, oder ist er derselbe, wie der: "Der Satz $p \supset q$ ist keine Tautologie"? Man kann den Satz "$\vdash p \supset q$" als einen *neuen* Satz der Math. auffassen,

ähnlich vielleicht wie einen Kreis

& einen Punkt als neue Kurve.

81[1] & 82[1] Was wir lehren, ist die Verschiedenartigkeit der Begriffe, wie sie weder in der Oberflächengrammatik unserer Sprache, noch in den Bildern, zum Ausdruck kommt, die wir mit unser Ausdrücken verbinden, sondern in der Struktur des Gebrauchs, den wir von ihnen machen. Diese Struktur zeigt uns, gleichsam, neue *Dimensionen* des Begriffs. Während von oben angesehen, alles in einer Fläche zu liegen scheint. Die Konnektivität des Begriffs ist eine andere als sie, vom gewöhnlichen Standpunkt aus gesehen, scheint. Was von da gesehen wie ausgefranst

erscheint erkennt man von dort als die Meridiane einer Kugel.

83[1] & 84[1] Denn vom Satz "$\vdash p \supset q \neq$ taut." möchte man etwa sagen: Gib uns nur Zeit & wir werden auch ihn als Tautologie erweisen. Wir werden ihn etwa arithmetisieren & dann in R'sche Logik umsetzen. Mache ich aber den Schritt, ihn $\vdash p \supset q$ zu schreiben, so erkenne ich damit eine neue Beweisart an für einen Satz dieser Form. Es ist doch dieser Satz (könnte man sagen) ein neues mathem. Instrument Denn $\vdash p \supset q$ ist (nun) ein Satz, der wahr ist, wenn er R-unbeweisbar ist, & das war "$\vdash p \supset q \neq$ taut." nicht. Ich will diesen Satz als ein neues Instrument aufgefaßt wissen. Und er ist doch offenbar keine Tautologie; & er ist doch offenbar ein Satz (& einer nach den Konstruktionsregeln R's).

85[1] Ehe man die 5-Ecks-Konstruktion kannte, & wußte, daß es keine 7-Ecks-Konstruktion gibt; war nicht das Wort “5-Ecks-Konstruktion” & “7-Ecks-Konstruktion” auf gleicher Stufe? Aber vom letzteren kann man sagen, daß er sinnlos ist – wenn man aber das nicht wußte so wußte man ebensowenig den Sinn des Wortes 5-Eckskonstruktion.

86[1] ’Die letzten Bestandteile der Materie sind Kugeln von ungefähr dieser

Größe.’ So einem Satz könnte man leicht Sinn geben. Aber stell Dir die Wirkungen dieses Satzes auf einen Jeans & Eddington & auf die Leser populär-wissenschaftlicher Schriften vor.

87[1] Nur von einem gewissen Punkt, vom Zuschauerraum, sieht man das *Zauberstück*. Von den andern Seiten sieht es ganz anders & durchaus nicht wie ein Zauberstück aus.

87[2] & 88[1] Verschiedenerlei Pointen eines Beweises: zu zeigen daß man das sagen muß, oder mit praktischen Bedürfnissen in Konflikt kommt – oder, zu zeigen, daß man das sagen *kann*, versucht sein kann es zu sagen. Ich meine: Der Beweis legt eine Ausdrucksweise nahe & kann dies tun weil diese Ausdrucksweise am besten den Tatsachen angepaßt ist, oder aber, weil sie eine paradoxe ist & es schön ist, zu finden, daß ein paradoxer Satz wahr ist.

89[1] Da die Tautologien, z.B. $\vdash p \vee \sim p$, ja doch nicht die Funktion gewöhnlicher Sätze haben so ist nicht einzusehen, warum wir nicht Sätze mit noch ganz andern Funktionen verwenden sollen.

89[2] & 90[1] Worauf läuft es denn im Ernst hinaus? Daß, wenn ich den Beweis der S-Unbeweisbarkeit von p als Beweis des Satzes p anerkenne, ich damit ein math. System anerkenne, in welchem p wahr ist & nicht zu S gehört; daß es also leicht ist, die Dinge so zu drehen, daß ...

91[1] Man könnte auf zwei Arten zur ‘Kurve’

kommen. Einmal durch eine Gleichung ...ten Grades & indem man zeigt daß ein Kreis & ein Punkt ein besonderer Fall solcher Kurven ist – aber auch auf einem ganz andern Weg: indem man einfach *sagt*

sei auch eine Kurve da durch sie auch Abszissen Ordinaten zugeordnet werden. Dies wäre auch ein Schritt der Math., aber ganz anderer Art, als der frühere.

92[1] & 93[1] Ich könnte mir einen Zauberkünstler denken, der seine Kunststücke vor einem Spiegel ausführt, der ihm sie zeigt, wie das Publikum sie sieht, & der nun selbst darüber staunt, daß er *dies* hat ausführen können. (So betrügt der Satz den Mathematiker.) Übrigens – nur ein sehr gewandter Zauberkünstler könnte durch so einen Spiegel betrogen werden, einer dem die *Griffe* seiner Kunststücke so geläufig geworden wären, daß er sich ihrer gar nicht mehr bewußt ist.

93[2] & 94[1] ‘Du kannst einen Menschen im Finstern nicht sehen; ich werde Dir zeigen, wie ein Mensch, im Finstern ausschaut.’ (Ich mache dann etwa eine Photographie von ihm mit infraroten Strahlen.) Was heißt es nun zu sagen: ‘Ehe ich den Prozeß nicht verstehe – verstehe ich auch das Resultat nicht’?

94[2] Er zeigt mir ein Bild & sagt: “So schaust Du im Dunkeln aus.” Versteh ich ihn nun, weil er mir doch ein Bild zeigt?

94[3] Gab es immer die Probleme der Grundlagen der Mathematik? –

94[4] & Das Problem entsteht dort am leichtesten, wo starke Tendenzen
95[1] der Assimilation der Ausdrucksweisen mit ganz verschiedener Anwendung sind.

95[2] Kommen diese Tendenzen plötzlich einem Wunsch entgegen & die Ähnlichkeit des Ausdrucks wird aufgegriffen um zu zeigen, daß *eigentlich* kein Unterschied bestehe, dann entstehen philosophische Beunruhigungen durch den Zwiespalt der Ausdrucksweisen, der sich in der alten Sphäre nicht austragen läßt.

95[3] & “Er hat den Ostpol der Erde entdeckt.” – Hat er vielleicht einen
96[1] Grund entdeckt, irgend etwas ganz Triviales “die Entdeckung des Ostpols” zu nennen?

96[2] “Er hat ein Mittel gegen die Arbeitslosigkeit gefunden.” “Er macht Vorschläge zur Beseitigung der Arbeitslosigkeit.” Verstehen wir diese Sätze?

96[3] “Er hat gefunden, wieviel Uhr es auf der Sonne ist.”

97[1] Ich vergleiche diesen Satz nicht mit etwas Rätselhaftem, sondern mit etwas Unverstandenem.

97[2] Ich zeige Dir eine neue Art diesen Satz zu betrachten: nicht im Lichte des Rätselhaften sondern im Lichte des Unverstandenen.

97[4] & 98[1] Du siehst diese Figur noch immer als Modifikation einer Figur A an (so weit sie sich auch schon von ihr entfernt hat); ich sage: sieh doch auf B hin! ist sie denn nicht eine Variation von *B*? Und so hattest Du sie bisher noch nicht angeschaut, & das ändert Deine Einstellung zur Figur. (Vielleicht aber ändert es *Deine* Einstellung nicht!)

98[2] & 99[1] & 100[1] Aber "$p \supset q \neq$ taut." ist doch ein Satz der Geometrie der Sätze einer gewissen Art. Und es ist nun entweder ein geometrisches Faktum, daß dieser Satz selbst eine Tautologie ist, oder, daß er keine ist. Angenommen das Faktum, er sei eine so kann doch, daß ich ihn nun einfach $\vdash p \supset q$ schreiben will, daran nichts ändern. Denn $\vdash p \supset q$ sagt doch nun genau dasselbe aus, wie jener Satz. Aber ich nehme doch also an, daß gewisse Transformationen, die ich zulasse, ihn zu einer Tautologie machen. Und die Frage ist ob ich solche Transformationen des Satzes zulassen soll, wenn ich die Schreibweise $\vdash p \supset q$ zulasse & den Beweis daß $p \supset q$ keine Tautologie ist.

100[2] Aber kommt das also nicht darauf hinaus, daß ich sehr wohl für einen Satz einen *nicht*-R.schen Beweis anerkennen kann & einen R.schen nicht?

101[1] Wieviele Multiplikationen habe ich auszuführen gelernt? – Wieviele Multiplikationen kann ich ausführen? –

101[2] 'Du kannst nicht alle Kisten der Welt, in eine Kiste legen.' Warum? Weil ihrer zu viele sind? – Ich werde Dir beweisen, daß es eine unendliche Zahl von Kisten gibt; denn keine Kiste, wie groß Du sie auch machst kann alle Kisten enthalten.

102[1] Man kann nicht alle Systeme auf die Kardinalzahlen aufteilen, weil, sie aufteilen, ein System bilden heißt.

102[2] Numeriere die Systeme einfach mit Brüchen zwischen 1 & 2 & behalte die Brüche zwischen 2 & 3, 3 & 4, u.s.w., in Vorrat. Dann kannst Du die Systeme der Systeme nach Herzenslust numerieren, wenn auch nicht in eine Reihe ordnen.

BCr[1] "Du kannst nicht alle Systeme in ein System bringen; daher kannst Du nicht allen Systemen Namen geben; denn Du kannst alle Namen in ein System bringen." – Du kannst allen Systemen Namen geben, solange Du nur die Namen nicht (dadurch) verschwendest, daß Du mit dem System *aller* Namen anfängst.

BCr[2] Wenn die Brüche die Namen sind so kann man sie den Systemen zuordnen, indem man ...